

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones simultáneas se obtienen las corrientes $\tilde{I}_a$, $\tilde{I}_b$ e $\tilde{I}_c$. La corriente en el neutro se obtiene mediante la ecuación

$$\tilde{I}_n = \tilde{I}_a + \tilde{I}_b + \tilde{I}_c$$

1.2 Método de las componentes simétricas aplicado al estudio de los sistemas trifásicos desequilibrados

Existe otro procedimiento para resolver un sistema trifásico desequilibrado, el cual se basa en la sustitución del sistema trifásico desequilibrado por dos sistemas trifásicos equilibrados y un sistema en que los tres fasores son iguales y están en fase; estos tres sistemas, combinados en forma adecuada son equivalentes al sistema original.

Este método, llamado de las componentes simétricas, que proporciona en muchos casos una solución más sencilla, se estudia a continuación.

Operador a

Se define el operador a como un número complejo de módulo unidad y de argumento $2\pi/3 = 120^\circ$.

$$a = 1 \angle 2\pi/3 = 1 \angle 120^\circ$$

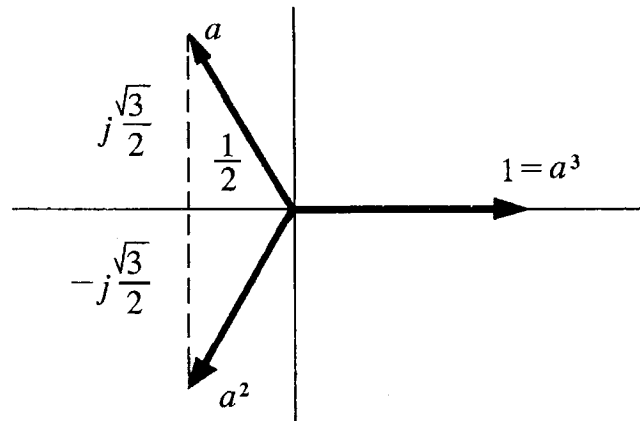
Al multiplicar un fasor por el operador a , se obtiene un nuevo fasor de igual módulo que el primero y girado 120° en el sentido positivo de los ángulos.

De la definición del operador a resultan evidentes las siguientes relaciones que se ilustran en la figura 1.8.

$$a = 1 \angle 120^\circ = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{j 120^\circ}$$

$$a^2 = 1 \angle 240^\circ = \cos 240^\circ + j \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{j 240^\circ}$$

$$a^3 = 1 \angle 360^\circ = \cos 360^\circ + j \sin 360^\circ = 1 + j0 = e^{j 360^\circ}$$

FIGURA 1.8 Representación gráfica del operador a

Haciendo uso del operador a puede describirse un sistema trifásico senoidal equilibrado como el representado por el sistema de fasores de la figura 1.9.

$$\tilde{V}_a = 1 \tilde{V}_a$$

$$\tilde{V}_b = a^2 \tilde{V}_a$$

$$\tilde{V}_c = a \tilde{V}_a$$

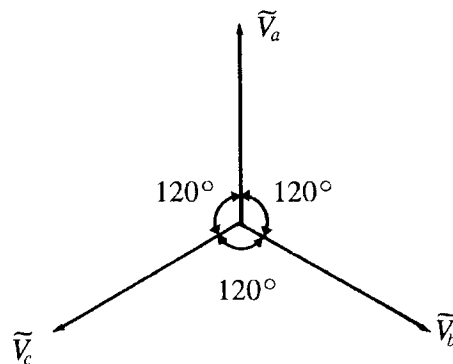


FIGURA 1.9 Sistema de tres fasores que representa los voltajes de un sistema trifásico equilibrado

1.2.1 Descomposición de un sistema trifásico desequilibrado en sus componentes simétricas

Todo sistema trifásico senoidal desequilibrado, representado por tres fasores desequilibrados, puede sustituirse por la suma de tres sistemas de fasores simétricos: un sistema directo o de secuencia positiva; un sistema inverso o de secuencia negativa y un sistema homopolar o de secuencia cero, que constituyen las componentes simétricas del sistema desequilibrado.

a) Sistema directo o de secuencia positiva

Es un sistema trifásico equilibrado que puede representarse por tres fasores de igual módulo, que forman un ángulo entre dos fasores consecutivos de 120° y que tienen una secuencia de fase a, b, c .

En la figura 1.10 se representa un sistema de fasores de secuencia positiva. Utilizando el operador a , puede escribirse

$$\tilde{I}_{b_1} = a^2 \tilde{I}_{a_1}$$

$$\tilde{I}_{c_1} = a \tilde{I}_{a_1}$$

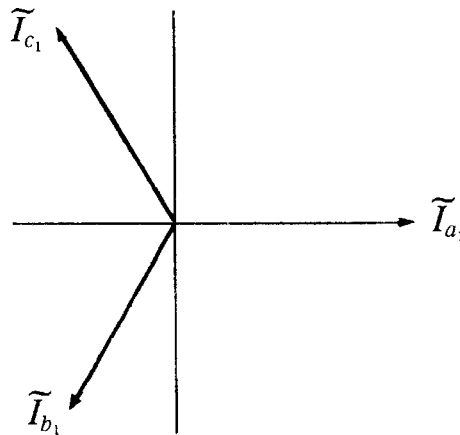


FIGURA 1.10 Sistema de fasores de secuencia positiva

b) Sistema inverso o de secuencia negativa

Es un sistema trifásico equilibrado que puede representarse por tres fasores de igual módulo, que forman un ángulo entre dos fasores consecutivos de 120° y que tienen una secuencia de fase a, c, b . En la figura 1.11 se representa un sistema de fasores de secuencia negativa.

Utilizando el operador a puede escribirse

$$\tilde{I}_{b_2} = a\tilde{I}_{a_2}$$

$$\tilde{I}_{c_2} = a^2\tilde{I}_{a_2}$$

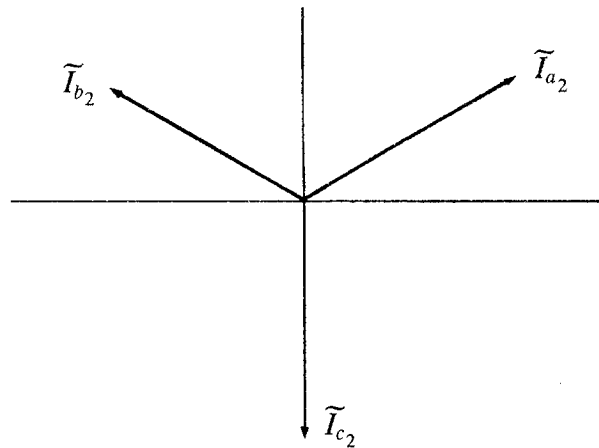


FIGURA 1.11 Sistema de fasores de secuencia negativa

c) Sistema homopolar o de secuencia cero

Es un sistema trifásico que puede representarse por tres fasores de igual módulo y en fase. En la figura 1.12 se representa un sistema de fasores de secuencia cero.

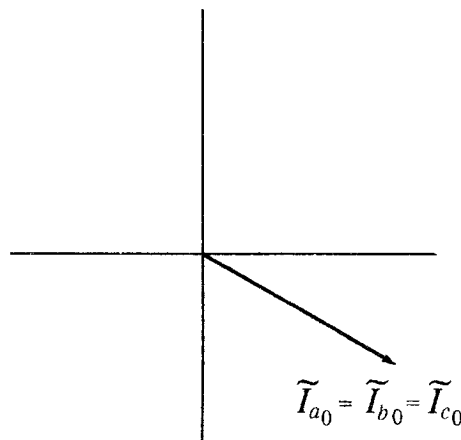


FIGURA 1.12 Sistema de fasores de secuencia cero

La suma de los tres sistemas: de secuencia positiva, negativa y cero, de las figuras 1.10, 1.11 y 1.12 nos da un sistema de tres fasores desequilibrados, como se muestra en la figura 1.13.

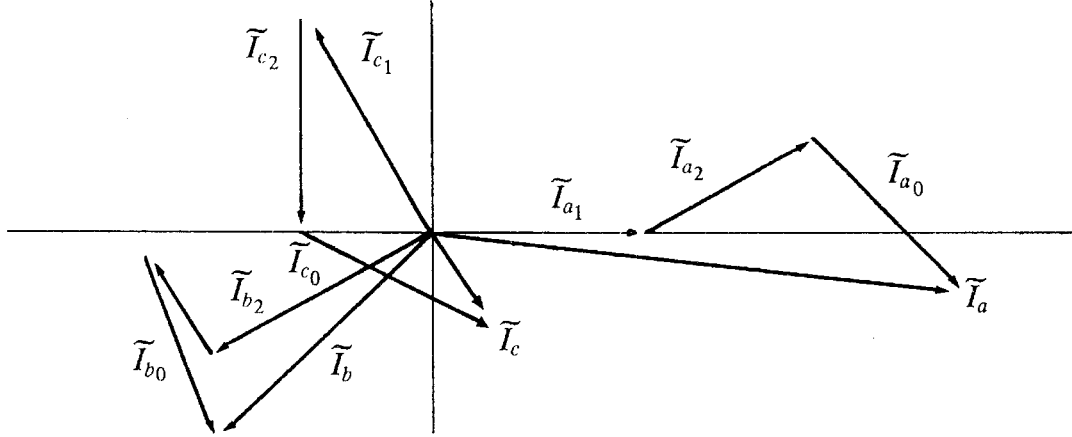


FIGURA 1.13 Sistema de tres fasores desequilibrados obtenidos sumando los sistemas de secuencia positiva, negativa y cero

En general, cualquier sistema de tres fasores desequilibrados puede expresarse como la suma de tres sistemas de fasores: secuencia positiva, secuencia negativa y secuencia cero.

$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} \quad (1.1)$$

$$\tilde{I}_b = \tilde{I}_{b_1} + \tilde{I}_{b_2} + \tilde{I}_{b_0} \quad (1.2)$$

$$\tilde{I}_c = \tilde{I}_{c_1} + \tilde{I}_{c_2} + \tilde{I}_{c_0} \quad (1.3)$$

1.2.2 Determinación de las componentes simétricas de secuencia positiva, negativa y cero a partir de los tres fasores desequilibrados

Utilizando el operador a , las ecuaciones 1.1, 1.2 y 1.3 pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} \quad (1.4)$$

$$\widetilde{I}_b = a^2 \widetilde{I}_{a_1} + a \widetilde{I}_{a_2} + \widetilde{I}_{a_0} \quad (1.5)$$

$$\widetilde{I}_c = a \widetilde{I}_{a_1} + a^2 \widetilde{I}_{a_2} + \widetilde{I}_{a_0} \quad (1.6)$$

Sumando las ecuaciones 1.4, 1.5 y 1.6

$$\widetilde{I}_a + \widetilde{I}_b + \widetilde{I}_c = \widetilde{I}_{a_1}(1 + a + a^2) + \widetilde{I}_{a_2}(1 + a + a^2) + 3\widetilde{I}_{a_0}$$

y como $(1 + a + a^2) = 0$

$$\widetilde{I}_{a_0} = \frac{\widetilde{I}_a + \widetilde{I}_b + \widetilde{I}_c}{3} \quad (1.7)$$

Multiplicando la ecuación 1.5 por a y la ecuación 1.6 por a^2

$$\widetilde{I}_a = \widetilde{I}_{a_1} + \widetilde{I}_{a_2} + \widetilde{I}_{a_0}$$

$$a \widetilde{I}_b = \widetilde{I}_{a_1} + a^2 \widetilde{I}_{a_2} + a \widetilde{I}_{a_0}$$

$$a^2 \widetilde{I}_c = \widetilde{I}_{a_1} + a \widetilde{I}_{a_2} + a^2 \widetilde{I}_{a_0}$$

Sumando las tres ecuaciones anteriores y teniendo en cuenta que $(1 + a + a^2) = 0$

$$\widetilde{I}_{a_1} = \frac{\widetilde{I}_a + a \widetilde{I}_b + a^2 \widetilde{I}_c}{3} \quad (1.8)$$

Multiplicando la ecuación 1.5 por a^2 y la ecuación 1.6 por a

$$\widetilde{I}_a = \widetilde{I}_{a_1} + \widetilde{I}_{a_2} + \widetilde{I}_{a_0}$$

$$a^2 \tilde{I}_b = a \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + a^2 \tilde{I}_{a_0}$$

$$a \tilde{I}_c = a^2 \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + a \tilde{I}_{a_0}$$

Sumando las tres ecuaciones anteriores y teniendo en cuenta que $(1 + a + a^2) = 0$

$$\tilde{I}_{a_2} = \frac{\tilde{I}_a + a^2 \tilde{I}_b + a \tilde{I}_c}{3} \quad (1.9)$$

Las ecuaciones 1.7, 1.8 y 1.9 permiten hallar las componentes de secuencia positiva, negativa y cero, y hacen ver que cualquier sistema de tres fasores desequilibrados puede descomponerse en tres sistemas de fasores: secuencia positiva, secuencia negativa y secuencia cero.

Para disminuir las operaciones necesarias para calcular las componentes simétricas, las expresiones 1.8 y 1.9 pueden transformarse como se explica a continuación.

Sustituyendo en la ecuación 1.8 el valor del operador

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tilde{I}_{a_1} = \frac{1}{3} \left[\tilde{I}_a + \left[-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \tilde{I}_b + \left[-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \tilde{I}_c \right]$$

Agrupando términos

$$\tilde{I}_{a_1} = \left[\tilde{I}_a - \frac{1}{2}(\tilde{I}_b + \tilde{I}_c) + j\frac{\sqrt{3}}{2} (\tilde{I}_b - \tilde{I}_c) \right] \quad (1.10)$$

Haciendo una sustitución similar en la ecuación (1.9)

$$\tilde{I}_{a_2} = \frac{1}{3} \left[\tilde{I}_a + \left[-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \tilde{I}_b + \left[-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \tilde{I}_c \right]$$

Agrupando términos

$$\tilde{I}_{a_2} = \frac{1}{3} \left[\tilde{I}_a - \frac{1}{2}(\tilde{I}_b + \tilde{I}_c) - j\frac{\sqrt{3}}{2}(\tilde{I}_b - \tilde{I}_c) \right]$$

EJEMPLO 1.3

Cálculo de las componentes simétricas de las corrientes de un sistema trifásico desequilibrado, dadas las corrientes.

$$\tilde{I}_a = 5 + j0 = 5 \angle 0^\circ$$

$$\tilde{I}_b = -3 - j4 = 5 \angle 233^\circ 8'$$

$$\tilde{I}_c = 1 - j1 = 1.414 \angle -45^\circ$$

SOLUCIÓN

$$\tilde{I}_{a_0} = \tilde{I}_{b_0} = \tilde{I}_{c_0} = \frac{(5 + j0) + (-3 - j4) + (1 - j1)}{3} = 1 - j1.667 = 1.944 \angle -59.04^\circ$$

$$\tilde{I}_b + \tilde{I}_c = -2 - j5$$

$$\tilde{I}_b - \tilde{I}_c = -4 - j3$$

$$\tilde{I}_{a_1} = \frac{1}{3} [5 - 0.5(-2 - j5) + j0.866(-4 - j3)]$$

$$\tilde{I}_{a_1} = 2.866 - j0.321 = 2.884 \angle 6.39^\circ$$

$$\tilde{I}_{a_2} = \frac{1}{3} [5 - 0.5(-2 - j5) - j0.866(-4 - j3)]$$

$$\tilde{I}_{a_2} = 1.134 + j1.988 = 2.289 \angle 60.30^\circ$$

$$\tilde{I}_{b_1} = a^2 \tilde{I}_{a_1} = (-0.5 - j0.866)(2.866 - j0.321) = -1.711 - j2.321$$

$$\tilde{I}_{c_1} = a \tilde{I}_{a_1} = (-0.5 + j0.866) (2.866 - j0.321) = -1.155 + j2.642$$

$$\tilde{I}_{b_2} = a \tilde{I}_{a_2} = (-0.5 + j0.866) (1.134 + j1.988) = -2.289 - j0.012$$

$$\tilde{I}_{c_2} = a^2 \tilde{I}_{a_2} = (-0.5 - j0.866) (1.134 + j1.988) = +1.155 - j1.976$$

Comprobación

$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = (2.866 - j0.321) + (1.134 + j1.988) + (1 - j1.667) = 5 + j0$$

$$\tilde{I}_b = \tilde{I}_{b_1} + \tilde{I}_{b_2} + \tilde{I}_{b_0} = (-1.711 - j2.321) + (-2.289 - j0.012) + (1 - j1.667) = -3 - j4$$

$$\tilde{I}_c = \tilde{I}_{c_1} + \tilde{I}_{c_2} + \tilde{I}_{c_0} = (-1.155 - j2.642) + (1.155 - j1.976) + (1 - j1.667) = 1 - j1$$

a) Expresión matricial de la transformación en componentes simétricas

Las ecuaciones 1.4, 1.5 y 1.6 pueden escribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \tilde{I}_a \\ \tilde{I}_b \\ \tilde{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{a_1} \\ \tilde{I}_{a_2} \\ \tilde{I}_{a_0} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Las ecuaciones 1.7, 1.8 y 1.9 pueden escribirse en forma matricial, como sigue:

$$\begin{bmatrix} \tilde{I}_{a_1} \\ \tilde{I}_{a_2} \\ \tilde{I}_{a_0} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_a \\ \tilde{I}_b \\ \tilde{I}_c \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Se empleará la siguiente notación abreviada

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

La matriz anterior se llama matriz de transformación. Su inversa es

$$[A^{-1}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

$$[\tilde{I}_{abc}] = \begin{bmatrix} \tilde{I}_a \\ \tilde{I}_b \\ \tilde{I}_c \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$[\tilde{I}_{a_{120}}] = \begin{bmatrix} \tilde{I}_{a_1} \\ \tilde{I}_{a_2} \\ \tilde{I}_{a_0} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Utilizando esta notación abreviada, las ecuaciones 1.2 y 1.13 quedan expresadas en la siguiente forma:

$$[\tilde{I}_{abc}] = [A][\tilde{I}_{a_{120}}] \quad (1.18)$$

$$[\tilde{I}_{a_{120}}] = [A^{-1}][\tilde{I}_{abc}] \quad (1.19)$$

Pueden escribirse expresiones similares para relacionar los voltajes con sus componentes simétricas. Por ejemplo,

$$[\tilde{V}_{abc}] = [A][\tilde{V}_{a_{120}}]$$

1.3 Impedancia de secuencias positiva, negativa y cero de un circuito trifásico de cuatro hilos

Como se vio anteriormente, un circuito trifásico desequilibrado, de cuatro hilos, puede reducirse al circuito equivalente trifásico desequilibrado mostrado en la figura 1.11, en el que el neutro está desprovisto de impedancia.

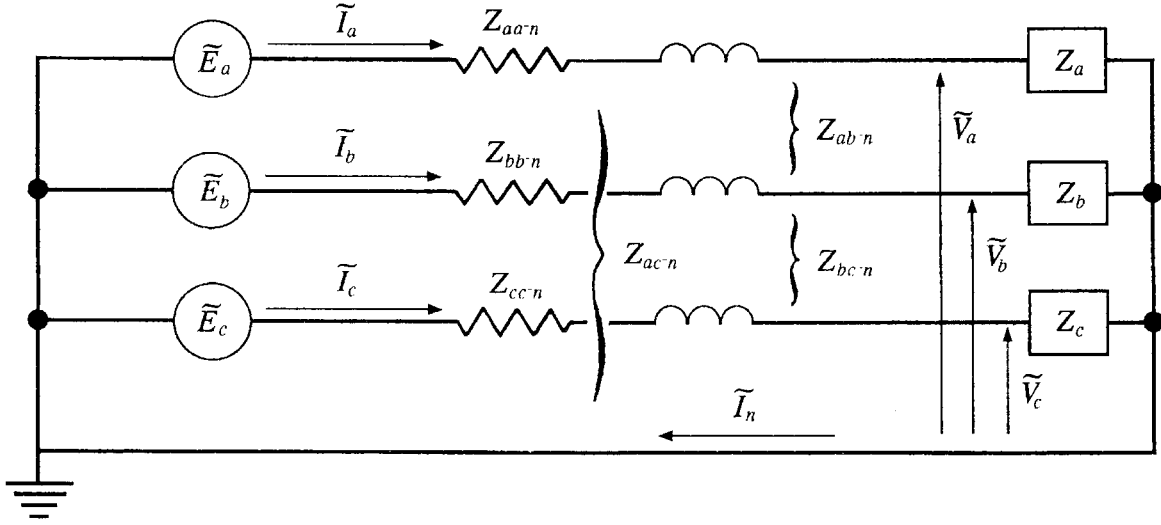


FIGURA 1.14 Circuito equivalente de un sistema trifásico de cuatro hilos

En dicho circuito, las caídas de voltaje en cada línea están dadas por la expresión

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_a \\ \tilde{E}_b \\ \tilde{E}_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{V}_a \\ \tilde{V}_b \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa-n} & Z_{ab-n} & Z_{ac-n} \\ Z_{ba-n} & Z_{bb-n} & Z_{bc-n} \\ Z_{ca-n} & Z_{cb-n} & Z_{cc-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_a \\ \tilde{I}_b \\ \tilde{I}_c \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Utilizando una notación abreviada

$$[\tilde{E}_{abc}] - [\tilde{V}_{abc}] = [Z_{abc}] [\tilde{I}_{abc}] \quad (1.21)$$

Expresando los voltajes y corrientes en función de sus componentes simétricas

$$[A] [\tilde{E}_{a_{120}}] - [A] [\tilde{V}_{a_{120}}] = [Z_{abc-n}] [A] [\tilde{I}_{a_{120}}] \quad (1.22)$$

Premultiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por $[A^{-1}]$ y recordando que $[A^{-1}] [A] = [u]$, siendo $[u]$ una matriz unidad

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{a_{120}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{V}_{a_{120}} \end{bmatrix} = [A^{-1}] [Z_{abc^{-n}}] [A] \begin{bmatrix} \tilde{I}_{a_{120}} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Se define la matriz de impedancias de secuencia positiva, negativa y cero de la siguiente forma:

$$[Z_{120}] = [A^{-1}] [Z_{abc^{-n}}] [A] \quad (1.24)$$

y puede escribirse

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{a_{120}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{V}_{a_{120}} \end{bmatrix} = [Z_{120}] \begin{bmatrix} \tilde{I}_{a_{120}} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

o en forma explícita

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{a_1} \\ \tilde{E}_{a_2} \\ \tilde{E}_{a_0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{V}_{a_1} \\ \tilde{V}_{a_2} \\ \tilde{V}_{a_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{10} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{20} \\ Z_{01} & Z_{02} & Z_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{a_1} \\ \tilde{I}_{a_2} \\ \tilde{I}_{a_0} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

En la matriz de impedancias anterior, los elementos Z_{11} , Z_{22} , Z_{00} son las impedancias propias de secuencia positiva, negativa y cero, respectivamente y los elementos con subíndice diferentes son las impedancias mutuas entre las tres secuencias.

La ecuación 1.26 muestra que, en general, las caídas de voltaje de cada secuencia son función de las corrientes de secuencia positiva, negativa y cero.

Los valores de las impedancias propias y mutuas de secuencia positiva, negativa y cero pueden determinarse a partir de la ecuación 1.24. Por ejemplo, para el caso de la figura 1.14.

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{10} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{20} \\ Z_{01} & Z_{02} & Z_{00} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{aa^{-n}} & Z_{ab^{-n}} & Z_{ac^{-n}} \\ Z_{ba^{-n}} & Z_{bb^{-n}} & Z_{bc^{-n}} \\ Z_{ca^{-n}} & Z_{cb^{-n}} & Z_{cc^{-n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando operaciones, se obtiene, haciendo primero la operación $[Z_{abc^{-n}}] [A]$

$$= \begin{bmatrix} Z_{aa^{-n}} + Z_{ab^{-n}} a^2 + Z_{ac^{-n}} a & Z_{aa^{-n}} + Z_{ab^{-n}} a + Z_{ac^{-n}} a^2 & Z_{aa^{-n}} + Z_{ab^{-n}} + Z_{ac^{-n}} \\ Z_{ba^{-n}} + Z_{bb^{-n}} a^2 + Z_{bc^{-n}} a & Z_{ba^{-n}} + Z_{bb^{-n}} a + Z_{bc^{-n}} a^2 & Z_{ba^{-n}} + Z_{bb^{-n}} + Z_{bc^{-n}} \\ Z_{ca^{-n}} + Z_{cb^{-n}} a^2 + Z_{cc^{-n}} a & Z_{ca^{-n}} + Z_{cb^{-n}} a + Z_{cc^{-n}} a^2 & Z_{ca^{-n}} + Z_{cb^{-n}} + Z_{cc^{-n}} \end{bmatrix}$$

Premultiplicando la matriz anterior por

$$[A^{-1}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{ab^{-n}} a^2 + Z_{ac^{-n}} a + Z_{ba^{-n}} a + Z_{bb^{-n}} a^3 + Z_{bc^{-n}} a^2 + Z_{ca^{-n}} a^2 + Z_{cb^{-n}} a^4 + Z_{cc^{-n}} a^3) \\ Z_{11} &= \frac{1}{3} [Z_{aa^{-n}} + Z_{bb^{-n}} + Z_{cc^{-n}} + Z_{ab^{-n}}(a^2 + a) + Z_{ac^{-n}}(a + a^2) + Z_{bc^{-n}}(a^2 + a)] \\ Z_{11} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{bb^{-n}} + Z_{cc^{-n}}) - \frac{1}{3} (Z_{ab^{-n}} + Z_{ac^{-n}} + Z_{bc^{-n}}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} Z_{12} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{ab^{-n}} a + Z_{ac^{-n}} a^2 + Z_{ba^{-n}} a + Z_{bb^{-n}} a^2 + Z_{bc^{-n}} a^3 + Z_{ca^{-n}} a^2 + Z_{cb^{-n}} a^3 + Z_{cc^{-n}} a^4) \\ Z_{12} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{bb^{-n}} a^2 + Z_{cc^{-n}} a + 2Z_{ab^{-n}} a + 2Z_{ca^{-n}} a^2 + 2Z_{bc^{-n}}) \\ Z_{12} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{bb^{-n}} a^2 + Z_{cc^{-n}} a) + \frac{2}{3} (Z_{ab^{-n}} a + Z_{ac^{-n}} a^2 + Z_{bc^{-n}}) \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} Z_{10} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{ab^{-n}} + Z_{ac^{-n}} + Z_{ba^{-n}} a + Z_{bb^{-n}} a + Z_{bc^{-n}} a + Z_{ca^{-n}} a^2 + Z_{cb^{-n}} a^2 + Z_{cc^{-n}} a^2) \\ Z_{10} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{bb^{-n}} a + Z_{cc^{-n}} a^2) - \frac{1}{3} (Z_{ab^{-n}} a^2 + Z_{ac^{-n}} a + Z_{bc^{-n}}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} Z_{21} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{ab^{-n}} a^2 + Z_{ac^{-n}} a + Z_{ba^{-n}} a^2 + Z_{bb^{-n}} a + Z_{bc^{-n}} a^3 + Z_{ca^{-n}} a + Z_{cb^{-n}} a^3 + Z_{cc^{-n}} a^2) \\ Z_{21} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{bb^{-n}} a + Z_{cc^{-n}} a^2) + \frac{2}{3} (Z_{ab^{-n}} a^2 + Z_{ac^{-n}} a + Z_{bc^{-n}}) \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} Z_{22} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{ab^{-n}} a + Z_{ac^{-n}} a^2 + Z_{ba^{-n}} a^2 a + Z_{bb^{-n}} a^3 + Z_{bc^{-n}} a^4 + Z_{ca^{-n}} a + Z_{cb^{-n}} a^2 + Z_{cc^{-n}} a^3) \\ Z_{22} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{bb^{-n}} + Z_{cc^{-n}}) - \frac{1}{3} (Z_{ab^{-n}} + Z_{ac^{-n}} + Z_{cb^{-n}}) \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} Z_{20} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{ab^{-n}} + Z_{ac^{-n}} + Z_{ba^{-n}} a^2 + Z_{bb^{-n}} a^2 + Z_{bc^{-n}} a^2 + Z_{ca^{-n}} a + Z_{cb^{-n}} a + Z_{cc^{-n}} a) \\ Z_{20} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{bb^{-n}} a^2 + Z_{cc^{-n}} a) - \frac{1}{3} (Z_{ab^{-n}} a + Z_{ac^{-n}} a^2 + Z_{bc^{-n}}) \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} Z_{01} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{ab^{-n}} a^2 + Z_{ac^{-n}} a + Z_{ba^{-n}} + Z_{bb^{-n}} a^2 + Z_{bc^{-n}} a + Z_{ca^{-n}} + Z_{cb^{-n}} a^2 + Z_{cc^{-n}} a) \\ Z_{01} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{bb^{-n}} a^2 + Z_{cc^{-n}} a) - \frac{1}{3} (Z_{ab^{-n}} a + Z_{ac^{-n}} a^2 + Z_{bc^{-n}}) \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} Z_{02} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{ab^{-n}} a + Z_{ac^{-n}} a^2 + Z_{ba^{-n}} + Z_{bb^{-n}} a^2 + Z_{bc^{-n}} a^2 + Z_{ca^{-n}} + Z_{cb^{-n}} a + Z_{cc^{-n}} a^2) \\ Z_{02} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{bb^{-n}} a + Z_{cc^{-n}} a^2) - \frac{1}{3} (Z_{ab^{-n}} a^2 + Z_{ac^{-n}} a + Z_{bc^{-n}}) \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} Z_{00} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{ab^{-n}} + Z_{ac^{-n}} + Z_{ba^{-n}} + Z_{bb^{-n}} + Z_{bc^{-n}} + Z_{ca^{-n}} + Z_{cb^{-n}} + Z_{cc^{-n}}) \\ Z_{00} &= \frac{1}{3} (Z_{aa^{-n}} + Z_{bb^{-n}} + Z_{cc^{-n}}) + \frac{2}{3} (Z_{ab^{-n}} + Z_{ac^{-n}} + Z_{bc^{-n}}) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Las ecuaciones 1.27 a 1.35 muestran que

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_{22} \neq Z_{00} & Z_{10} &\neq Z_{01} \\ Z_{12} &\neq Z_{21} & Z_{20} &= Z_{01} \\ Z_{10} &= Z_{02} & Z_{20} &\neq Z_{02} \end{aligned}$$

En general, las impedancias mutuas entre secuencias positiva, negativa y cero no son iguales.

1.4 Impedancias de secuencia positiva, negativa y cero de circuitos trifásicos simétricos

Un caso particular de importancia práctica considerable es el de los circuitos trifásicos simétricos.

Como se vio al estudiar las características eléctricas de las líneas de transmisión, si los tres conductores de la línea y el neutro están colocados en forma simétrica, de manera que las distancias de estos al neutro sean iguales, o si existen transposiciones a la tercera parte y a las dos terceras partes de la línea, se verifica que

$$Z_{ab} = Z_{ac} = Z_{bc} = j2\pi f \left[2 \text{Ln} \frac{1}{\sqrt[3]{dab \times dac \times dbc}} \right] 10^{-7} \quad \Omega/\text{m} \quad (1.36)$$

$$Z_{an} = Z_{bn} = Z_{cn} = j2\pi f \left[2 \text{Ln} \frac{1}{\sqrt[3]{dan \times dbn \times dcn}} \right] 10^{-7} \quad \Omega/\text{m} \quad (1.37)$$

Además, como los conductores de las tres fases son iguales

$$Z_{aa} = Z_{bb} = Z_{cc} = R_c + j \left(2\pi f 2 \text{Ln} \frac{1}{r_c} \right) 10^{-7} \quad \Omega/\text{m} \quad (1.38)$$

$$Z_{nn} = R_n + j \left(2\pi f 2 \text{Ln} \frac{1}{r_n} \right) 10^{-7} \quad \Omega/\text{m} \quad (1.38')$$

Debido a estas condiciones se verifica que

$$Z_{aa^{-}n} = Z_{bb^{-}n} = Z_{cc^{-}n} = (Z_{aa} + 2Z_{an} + Z_{nn}) \quad (1.39)$$

$$Z_{ab^{-}n} = Z_{ac^{-}n} = Z_{bc^{-}n} = (Z_{ab} + Z_{an} + Z_{nb} + Z_{nn}) \quad (1.40)$$

Las ecuaciones 1.27 a 1.35 se simplifican de la siguiente forma:

$$Z_{11} = Z_{22} = Z_{aa^{-}n} - Z_{ab^{-}n} = Z_{aa} - Z_{ab} \quad (1.41)$$

$$Z_{00} = Z_{aa^{-}n} + 2Z_{ab^{-}n} \quad (1.42)$$

$$Z_{12} = \frac{1}{3} Z_{aa^{-}n} (1 + a^2 + a) + \frac{2}{3} Z_{ab^{-}n} (a + a^2 + 1) = 0$$

$$Z_{21} = \frac{1}{3} Z_{aa^{-}n} (1 + a + a^2) + \frac{2}{3} Z_{ab^{-}n} (a^2 + a + 1) = 0$$

$$Z_{10} = Z_{02} = \frac{1}{3} Z_{aa^{-}n} (1 + a + a^2) - \frac{1}{3} Z_{ab^{-}n} (a^2 + a + 1) = 0$$

$$Z_{20} = Z_{01} = \frac{1}{3} Z_{aa^{-}n} (1 + a^2 + a) - \frac{1}{3} Z_{ab^{-}n} (a + a^2 + 1) = 0$$

o sea que las impedancias mutuas entre secuencias se reducen a cero.

Para este caso, la ecuación 1.26 queda

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{a_1} \\ \tilde{E}_{a_2} \\ \tilde{E}_{a_0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{V}_{a_1} \\ \tilde{V}_{a_2} \\ \tilde{V}_{a_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{a_1} \\ \tilde{I}_{a_2} \\ \tilde{I}_{a_0} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

es decir, que si el sistema es simétrico, las corrientes de cada secuencia producen únicamente caídas de voltaje de la misma secuencia. En este caso se tienen tres sistemas trifásicos independientes, representados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{a_1} - \tilde{V}_{a_1} &= Z_{11} \tilde{I}_{a_1} \\ \tilde{E}_{a_2} - \tilde{V}_{a_2} &= Z_{22} \tilde{I}_{a_2} \\ \tilde{E}_{a_0} - \tilde{V}_{a_0} &= Z_{00} \tilde{I}_{a_0} \end{aligned} \quad (1.43')$$

que sustituyen al sistema trifásico desequilibrado original, que es

$$\begin{aligned} \tilde{E}_a - \tilde{V}_a &= Z_{aa^{-n}} \tilde{I}_a + Z_{ba^{-n}} \tilde{I}_b + Z_{ca^{-n}} \tilde{I}_c \\ \tilde{E}_b - \tilde{V}_b &= Z_{ba^{-n}} \tilde{I}_a + Z_{bb^{-n}} \tilde{I}_b + Z_{bc^{-n}} \tilde{I}_c \\ \tilde{E}_c - \tilde{V}_c &= Z_{ca^{-n}} \tilde{I}_a + Z_{cb^{-n}} \tilde{I}_b + Z_{cc^{-n}} \tilde{I}_c \end{aligned}$$

donde, para las condiciones de simetría del sistema antes mencionado, se verifica que

$$\begin{aligned} Z_{aa^{-n}} &= Z_{bb^{-n}} = Z_{cc^{-n}} \\ Z_{ab^{-n}} &= Z_{ac^{-n}} = Z_{bc^{-n}} \end{aligned}$$

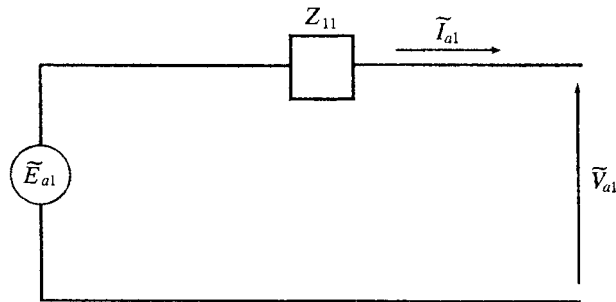
En conclusión, se ha sustituido el cálculo de un sistema trifásico desequilibrado por el cálculo de tres sistemas trifásicos, dos de ellos equilibrados y el tercero con las tres corrientes de la misma magnitud y el mismo ángulo.

Las ecuaciones anteriores pueden simplificarse teniendo en cuenta que, en un sistema de energía eléctrica, las fuerzas electromotrices generadas constituyen sistemas trifásicos equilibrados de secuencia positiva y que los desequilibrios en el sistema se deben generalmente a una asimetría en la configuración del sistema, causada, por ejemplo, por una falla de aislamiento, o porque la

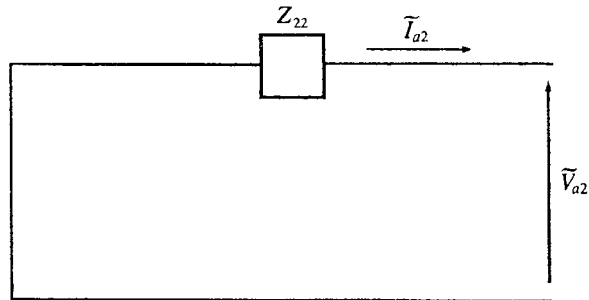
carga trifásica está desequilibrada. Siempre que no haya desequilibrio en las fuerzas electromotrices, se tiene $\tilde{E}_{a_2} = 0$ y $\tilde{E}_{a_0} = 0$; y las ecuaciones 1.43 se reducen a

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{a_1} - \tilde{V}_{a_1} &= Z_{11} \tilde{I}_{a_1} \\ - \tilde{V}_{a_2} &= Z_{22} \tilde{I}_{a_2} \\ - \tilde{V}_{a_0} &= Z_{00} \tilde{I}_{a_0}\end{aligned}\tag{1.44}$$

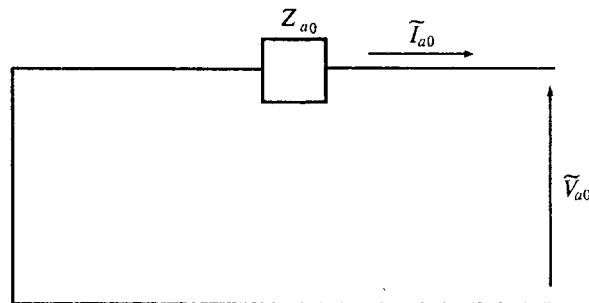
Estas tres ecuaciones pueden representarse mediante los tres circuitos equivalentes mostrados en la figura 1.15.



a) Circuito equivalente de secuencia positiva



b) Circuito equivalente de secuencia negativa



c) Circuito equivalente de secuencia cero

FIGURA 1.15 Circuitos equivalentes de secuencias positiva, negativa y cero

1.5 Desequilibrios en los sistemas trifásicos debidos a cortocircuitos

El método de las componentes simétricas es especialmente útil para el cálculo de los sistemas desequilibrados debidos a cortocircuitos entre fases o de fase a tierra.

Se considerarán los siguientes tipos de falla de aislamiento en una línea de transmisión trifásica.

- Falla de una fase a tierra
- Falla de dos fases a tierra
- Falla entre dos fases
- Falla trifásica

Para cada tipo de falla se considerarán dos casos: falla franca y falla a través de una impedancia; este último caso se presenta cuando la falla se establece a través de un arco eléctrico, el cual constituye una impedancia resistiva.

Para facilitar el cálculo de las corrientes y de los voltajes en el punto del circuito trifásico donde ocurre la falla, se marcarán las fases de manera que las fallas resulten simétricas con respecto a la fase a .

Se considerará que no hay carga conectada al final de la línea cuando ocurre la falla.

La representación del alternador al que está conectada la línea de transmisión trifásica se reducirá inicialmente a tres fuentes de voltaje que constituyen un sistema de voltajes trifásicos equilibrados de secuencia positiva. Más adelante se dará una representación más aproximada del alternador, incluyendo las impedancias de secuencia positiva, negativa y cero del mismo.

1.5.1 Falla monofásica a tierra

La asimetría debida a la falla de la fase a a tierra está definida por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_a &\neq 0 & \tilde{V}_a &= 0 \\ \tilde{I}_b &= 0 & \tilde{V}_b &\neq 0 \\ \tilde{I}_c &= 0 & \tilde{V}_c &\neq 0\end{aligned}\tag{1.45}$$

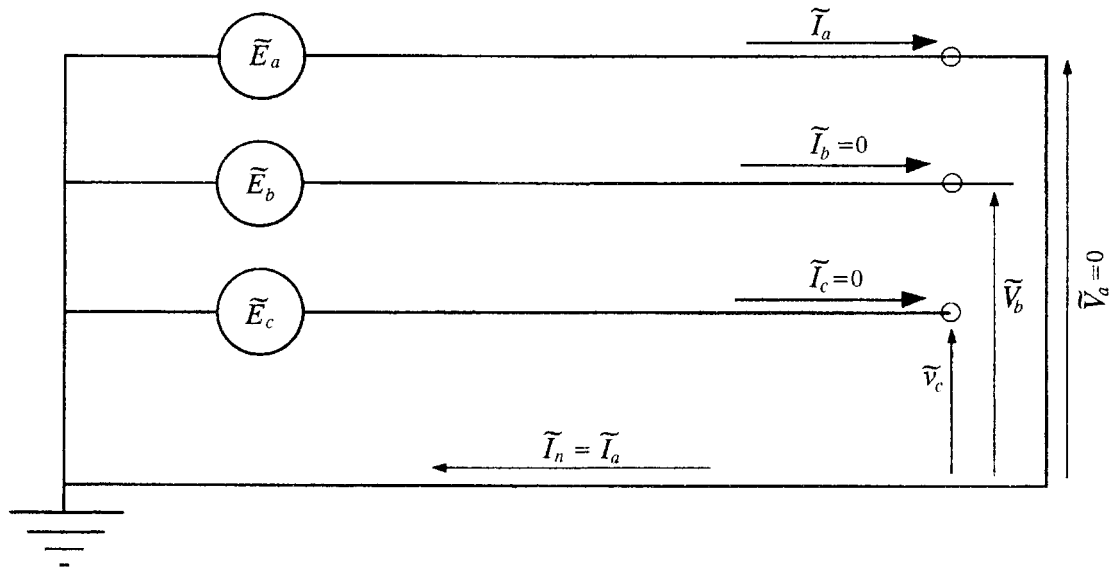


FIGURA 1.16 Falla monofásica a tierra

Las ecuaciones que definen el comportamiento del circuito trifásico en función de las componentes simétricas son, como se vio antes, las siguientes:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{a_1} - \tilde{V}_{a_1} &= Z_{11} \tilde{I}_{a_1} \\ - \tilde{V}_{a_2} &= Z_{22} \tilde{I}_{a_2} \\ - \tilde{V}_{a_0} &= Z_{00} \tilde{I}_{a_0}\end{aligned}$$

En el punto donde ocurre la asimetría, o sea en el punto de falla, pueden escribirse las siguientes relaciones entre las cantidades de fase y sus componentes simétricas

$$\begin{aligned}\tilde{V}_a &= \tilde{V}_{a_1} + \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} = 0 \\ \tilde{I}_{a_1} &= \frac{\tilde{I}_a + a\tilde{I}_b + a^2\tilde{I}_c}{3} \\ \tilde{I}_{a_2} &= \frac{\tilde{I}_a + a^2\tilde{I}_b + a\tilde{I}_c}{3} \\ \tilde{I}_{a_0} &= \frac{\tilde{I}_a + \tilde{I}_b + \tilde{I}_c}{3}\end{aligned}$$

y como $\tilde{I}_b = 0$ e $\tilde{I}_c = 0$

$$\tilde{I}_{a_1} = \tilde{I}_{a_2} = \tilde{I}_{a_0} = \frac{\tilde{I}_a}{3}$$

El problema consiste en determinar el valor de las componentes simétricas de las corrientes y de los voltajes; $\tilde{I}_{a_1}$, $\tilde{I}_{a_2}$, $\tilde{I}_{a_0}$, $\tilde{V}_{a_1}$, $\tilde{V}_{a_2}$, $\tilde{V}_{a_0}$, que constituyen las seis incógnitas y pueden obtenerse resolviendo el siguiente sistema de seis ecuaciones independientes

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{a_1} - \tilde{V}_{a_1} &= Z_{11}\tilde{I}_{a_1} \\ - \tilde{V}_{a_2} &= Z_{22}\tilde{I}_{a_2} \\ - \tilde{V}_{a_0} &= Z_{00}\tilde{I}_{a_0}\end{aligned}$$

$$\tilde{V}_{a_1} + \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} = 0$$

$$\tilde{I}_{a_1} = \tilde{I}_{a_2} = \frac{\tilde{I}_a}{3}$$

$$\tilde{I}_{a_0} = \frac{\tilde{I}_a}{3}$$

En lugar de resolver algebraicamente el sistema de seis ecuaciones simultáneas con seis incógnitas, puede establecerse un circuito equivalente en el que se verifiquen esas ecuaciones. Esto se logra conectando en serie los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero, como se muestra en la figura 1.14.

Del circuito equivalente de la figura 1.17 se deduce

$$\tilde{I}_{a_1} = \tilde{I}_{a_2} = \tilde{I}_{a_0} = \frac{\tilde{E}_{a_1}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}}$$

$$\tilde{V}_{a_1} = \tilde{E}_{a_1} - Z_{11}\tilde{I}_{a_1}$$

$$\tilde{V}_{a_2} = -Z_{22}\tilde{I}_{a_2}$$

$$\tilde{V}_{a_0} = -Z_{00}\tilde{I}_{a_0}$$

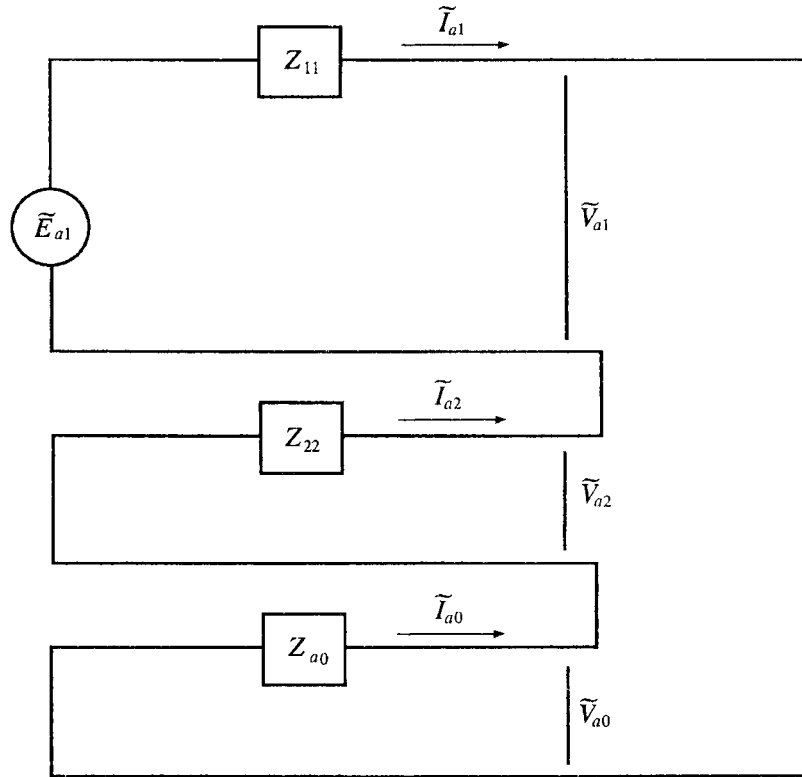


FIGURA 1.17 Conexión de los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero para el caso de una falla monofásica a tierra

Conocidas las componentes simétricas de la corriente de falla de la fase a y del voltaje al neutro de la fase a , en el punto de falla, pueden calcularse las corrientes

$$\tilde{I}_a, \tilde{I}_b \text{ e } \tilde{I}_c$$

y los voltajes al neutro en el punto de falla

$$\tilde{V}_a, \tilde{V}_b \text{ y } \tilde{V}_c$$

de la siguiente forma:

$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = \frac{3\tilde{E}_{a_1}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}}$$

$$\widetilde{I}_b = a^2 \widetilde{I}_{a_1} + a \widetilde{I}_{a_2} + \widetilde{I}_{a_0} = \widetilde{I}_{a_1} (a^2 + a + 1) = 0$$

$$\widetilde{I}_c = a \widetilde{I}_{a_1} + a^2 \widetilde{I}_{a_2} + \widetilde{I}_{a_0} = \widetilde{I}_{a_1} (a + a^2 + 1) = 0$$

ya que

$$\widetilde{I}_{a_1} = \widetilde{I}_{a_2} = \widetilde{I}_{a_0}.$$

$$\widetilde{V}_a = \widetilde{V}_{a_1} + \widetilde{V}_{a_2} + \widetilde{V}_{a_0}$$

$$= \widetilde{E}_{a_1} - Z_{11} \widetilde{I}_{a_1} - Z_{22} \widetilde{I}_{a_2} - Z_{00} \widetilde{I}_{a_0}$$

$$\widetilde{V}_a = \widetilde{E}_{a_1} - (Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}) \frac{\widetilde{E}_{a_1}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}} = 0$$

$$\widetilde{V}_b = a^2 \widetilde{V}_{a_1} + a \widetilde{V}_{a_2} + \widetilde{V}_{a_0}$$

$$= a^2 (\widetilde{E}_{a_1} - Z_{11} \widetilde{I}_{a_1}) - a Z_{22} \widetilde{I}_{a_2} - Z_{00} \widetilde{I}_{a_0}$$

$$= a^2 \widetilde{E}_{a_1} - (a^2 Z_{11} + a Z_{22} + Z_{00}) \frac{\widetilde{E}_{a_1}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}}$$

$$\widetilde{V}_b = \left[\frac{(a^2 - a)Z_{22} + (a^2 - 1)Z_{00}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}} \right] \widetilde{E}_{a_1}$$

$$\widetilde{V}_c = a \widetilde{V}_{a_1} + a^2 \widetilde{V}_{a_2} + \widetilde{V}_{a_0}$$

$$= a (\widetilde{E}_{a_1} - Z_{11} \widetilde{I}_{a_1}) - a^2 Z_{22} \widetilde{I}_{a_2} + Z_{00} \widetilde{I}_{a_0}$$

$$= a \widetilde{E}_{a_1} - (a Z_{11} + a^2 Z_{22} + Z_{00}) \frac{\widetilde{E}_{a_1}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}}$$

$$\widetilde{V}_c = \left[\frac{(a - a^2)Z_{22} + (a - 1)Z_{00}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}} \right] \widetilde{E}_{a_1}$$

1.5.2 Falla monofásica a tierra a través de una impedancia

La asimetría debida a la falla a tierra de la línea a a través de una impedancia Z_f , queda definida por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_a &\neq 0 & \tilde{V}_a &= Z_f \tilde{I}_a \\ \tilde{I}_b &= 0 & \tilde{V}_b &\neq 0 \\ \tilde{I}_c &= 0 & \tilde{V}_c &\neq 0\end{aligned}$$

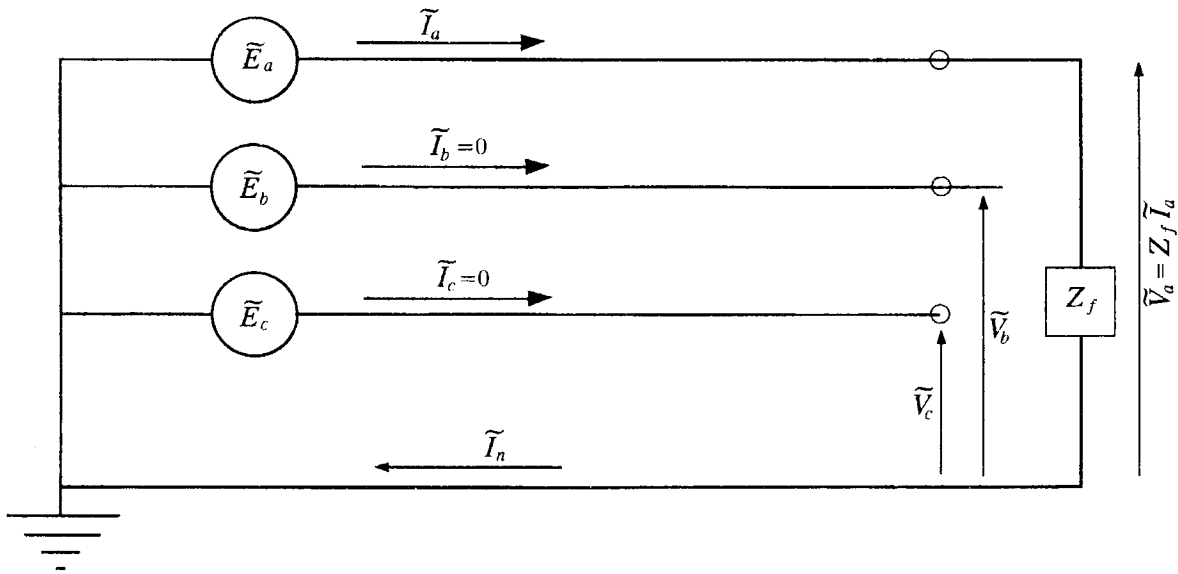


FIGURA 1.18 Falla monofásica a tierra a través de una impedancia

Las ecuaciones que definen el comportamiento del circuito trifásico en función de las componentes simétricas son

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{a_1} - \tilde{V}_{a_1} &= Z_{11} \tilde{I}_{a_1} \\ - \tilde{V}_{a_2} &= Z_{22} \tilde{I}_{a_2} \\ - \tilde{V}_{a_0} &= Z_{00} \tilde{I}_{a_0}\end{aligned}$$

En el punto donde ocurre la asimetría, o sea en el punto de falla, pueden escribirse las siguientes relaciones entre las cantidades de fase y sus componentes simétricas

Teniendo en cuenta que $\tilde{I}_b = 0$, $\tilde{I}_c = 0$

$$\tilde{I}_{a_1} = \tilde{I}_{a_2} = (\tilde{I}_a / 3)$$

$$\tilde{I}_{a_0} = (\tilde{I}_a / 3)$$

$$\tilde{V}_a = Z_f \tilde{I}_a = 3Z_f \tilde{I}_{a_1} = \tilde{V}_{a_1} + \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0}$$

Las condiciones impuestas por las seis ecuaciones anteriores pueden satisfacerse conectando los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero, como se indica en la figura 1.19.

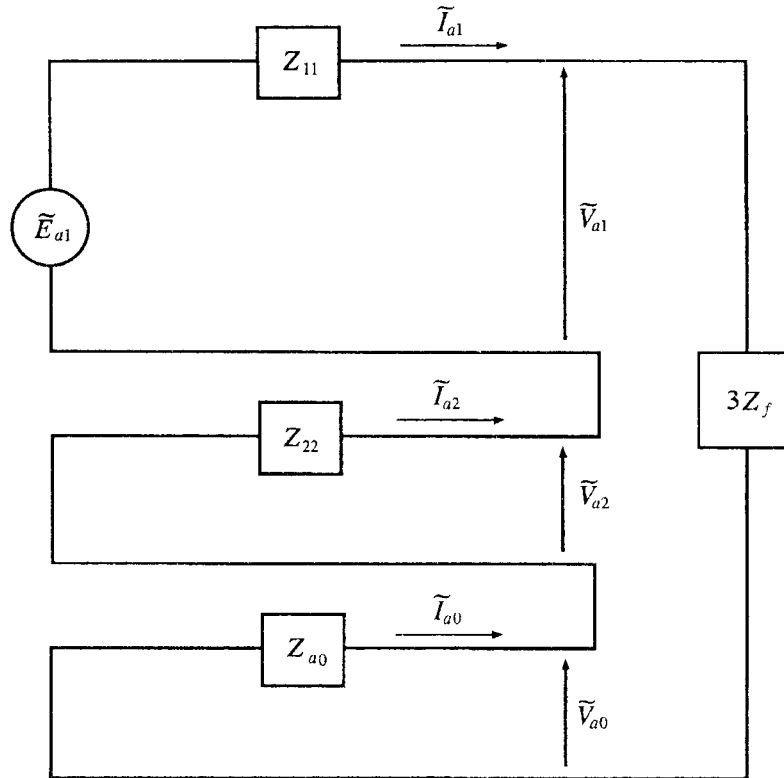


FIGURA 1.19 Conexión de los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero para el caso de una falla monofásica a tierra a través de una impedancia

Generalmente, la impedancia Z_f se debe a que la falla a tierra se establece a través de un arco eléctrico, que constituye una impedancia resistiva.

Del circuito equivalente de la figura 1.19 se deduce

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{a_1} &= \tilde{I}_{a_2} = \tilde{I}_{a_0} = \frac{\tilde{E}_{a_1}}{Z_{11} Z_{22} + Z_{00} + 3Z_f} \\ \tilde{V}_{a_1} &= \tilde{E}_{a_1} - Z_{11} \tilde{I}_{a_1} \\ \tilde{V}_{a_2} &= -Z_{22} \tilde{I}_{a_2} \\ \tilde{V}_{a_0} &= -Z_{00} \tilde{I}_{a_0} \\ \tilde{V}_{a_1} + \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} &= 3Z_f \tilde{I}_{a_1}\end{aligned}$$

A partir de las componentes simétricas las corrientes de fase y los voltajes al neutro pueden calcularse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_a &= \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = \frac{3\tilde{E}_{a_1}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00} + 3Z_f} \\ \tilde{I}_b &= a^2 \tilde{I}_{a_1} + a \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = \tilde{I}_{a_1} (a^2 + a + 1) = 0 \\ \tilde{I}_c &= a \tilde{I}_{a_1} + a^2 \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = \tilde{I}_{a_1} (a + a^2 + 1) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{V}_a &= \tilde{V}_{a_1} + \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} = 3Z_f \tilde{I}_{a_1} \\ \tilde{V}_b &= a^2 \tilde{V}_{a_1} + a \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} \\ \tilde{V}_b &= \left[\frac{(a^2 - a)Z_{22} + (a^2 - 1)Z_{00}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00} + 3Z_f} \right] \tilde{E}_{a_1} \\ \tilde{V}_c &= a \tilde{V}_{a_1} + a^2 \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} \\ \tilde{V}_c &= \left[\frac{(a^2 - a)Z_{22} + (a - 1)Z_{00}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00} + 3Z_f} \right] \tilde{E}_{a_1}\end{aligned}$$

1.5.3 Falla bifásica a tierra

La asimetría debida a la falla a tierra de las líneas b y c queda definida por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll}
 \tilde{I}_a = 0 & \tilde{V}_a \neq 0 \\
 \tilde{I}_b \neq 0 & \tilde{V}_b = 0 \\
 \tilde{I}_c \neq 0 & \tilde{V}_c = 0
 \end{array}$$

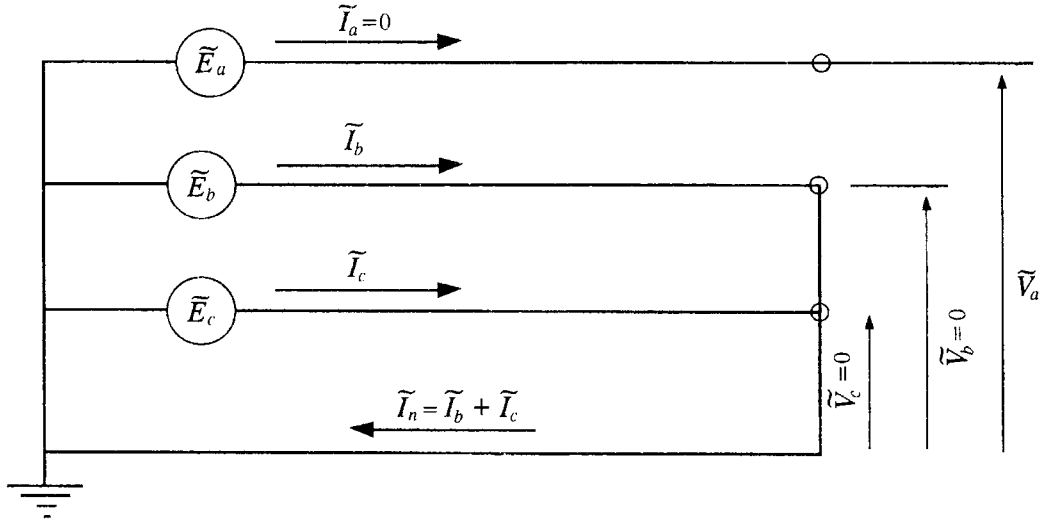


FIGURA 1.20 Falla bifásica a tierra

Las ecuaciones que definen el comportamiento del circuito trifásico en función de las componentes simétricas son

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_{a_1} - \tilde{V}_{a_1} &= Z_{11} \tilde{I}_{a_1} \\
 - \tilde{V}_{a_2} &= Z_{22} \tilde{I}_{a_2} \\
 - \tilde{V}_{a_0} &= Z_{00} \tilde{I}_{a_0}
 \end{aligned}$$

En el punto de falla pueden escribirse las siguientes relaciones entre las cantidades de fase y sus componentes simétricas, teniendo en cuenta que $\tilde{I}_a = 0$ y $\tilde{V}_b = \tilde{V}_c = 0$

$$\tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = 0$$

$$\tilde{V}_{a_1} = \tilde{V}_{a_2} = \frac{\tilde{V}_a}{3}$$

$$\tilde{V}_{a_0} = \frac{\tilde{V}_a}{3}$$

Las condiciones impuestas por las seis ecuaciones anteriores pueden satisfacerse conectando los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero como se muestra en la figura 1.21.

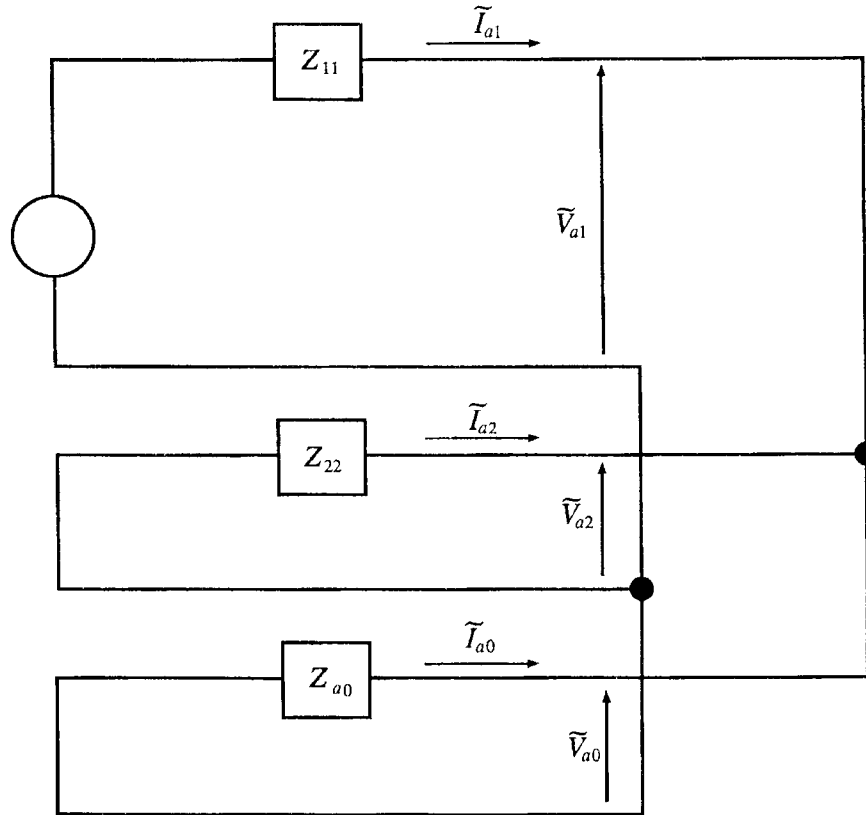


FIGURA 1.21 Conexión de los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero para el caso de una falla bifásica a tierra

Del circuito de la figura 1.21 se deduce que

$$\tilde{I}_{a_1} = \frac{\tilde{E}_{a_1}}{Z_{11} + \frac{Z_{22} Z_{00}}{Z_{22} + Z_{00}}} = \frac{Z_{22} + Z_{00}}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + Z_{22} Z_{00}} \tilde{E}_{a_1}$$

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{a_2} &= -\tilde{I}_{a_1} \frac{Z_{00}}{Z_{22} + Z_{00}} = -\frac{Z_{00}}{Z_{11}Z_{22} + Z_{11}Z_{00} + Z_{22}Z_{00}} \tilde{E}_{a_1} \\ \tilde{I}_{a_0} &= -\tilde{I}_{a_1} \frac{Z_{22}}{Z_{22} + Z_{00}} = -\frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} + Z_{11}Z_{00} + Z_{22}Z_{00}} \tilde{E}_{a_1}\end{aligned}$$

De dicho circuito se deduce también que

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{a_1} &= \tilde{V}_{a_2} = \tilde{V}_{a_0} = \tilde{E}_{a_1} - Z_{11}\tilde{I}_{a_1} = -Z_{22}\tilde{I}_{a_2} = -Z_{00}\tilde{I}_{a_0} \\ \tilde{V}_{a_1} + \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} &= \frac{Z_{22}Z_{00}}{Z_{11}Z_{22} + Z_{11}Z_{00} + Z_{22}Z_{00}} \tilde{E}_{a_1}\end{aligned}$$

Conocidas las componentes simétricas de la corriente de falla de la fase a y del voltaje al neutro de la fase a en el punto de falla, pueden calcularse las corrientes $\tilde{I}_a$, $\tilde{I}_b$ e $\tilde{I}_c$ y los voltajes al neutro $\tilde{V}_a$, $\tilde{V}_b$ y $\tilde{V}_c$ en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_a &= \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = 0 \\ \tilde{I}_b &= a^2\tilde{I}_{a_1} + a\tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = \frac{(a^2 - 1)Z_{22} + (a^2 - a)Z_{00}}{Z_{11}Z_{22} + Z_{11}Z_{00} + Z_{22}Z_{00}} \tilde{E}_{a_1} \\ \tilde{I}_c &= a\tilde{I}_{a_1} + a^2\tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = \frac{(a - 1)Z_{22} + (a - a^2)Z_{00}}{Z_{11}Z_{22} + Z_{11}Z_{00} + Z_{22}Z_{00}} \tilde{E}_{a_1} \\ \tilde{V}_a &= \tilde{V}_{a_1} + \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} = \frac{3Z_{22}Z_{00}}{Z_{11}Z_{22} + Z_{11}Z_{00} + Z_{22}Z_{00}} \tilde{E}_{a_1} \\ \tilde{V}_b &= a^2\tilde{V}_{a_1} + a\tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} = 0 \\ \tilde{V}_c &= a\tilde{V}_{a_1} + a^2\tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} = 0\end{aligned}$$

1.5.4 Falla bifásica a tierra a través de una impedancia

La asimetría debida a la falla a tierra de las líneas b y c , a través de la impedancia Z_f , queda definida por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_a &= 0 & \tilde{V}_a &\neq 0 \\ \tilde{I}_b &\neq 0 & \tilde{V}_b &= \tilde{V}_c = Z_f (\tilde{I}_b + \tilde{I}_c) \\ \tilde{I}_c &\neq 0\end{aligned}$$

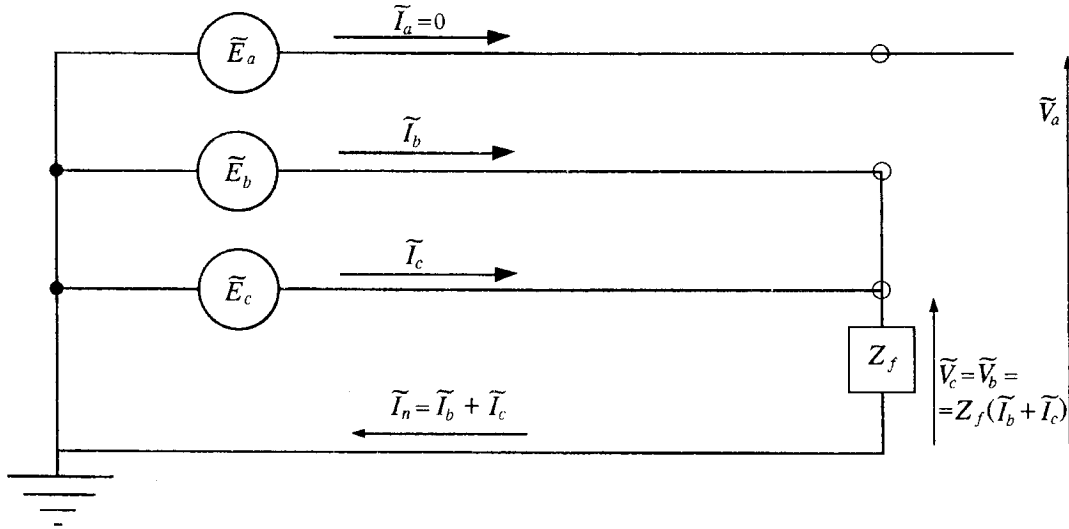


FIGURA 1.22 Falla bifásica a tierra a través de una impedancia

Las ecuaciones que definen el comportamiento del circuito trifásico en función de las componentes simétricas son

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{a_1} - \tilde{V}_{a_1} &= Z_{11} \tilde{I}_{a_1} \\ - \tilde{V}_{a_2} &= Z_{22} \tilde{I}_{a_2} \\ - \tilde{V}_{a_0} &= Z_{00} \tilde{I}_{a_0}\end{aligned}$$

En el punto de falla pueden escribirse las siguientes relaciones entre las cantidades de fase y sus componentes simétricas.

Teniendo en cuenta que

$$\tilde{I}_a = 0 ; \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = 0$$

Las componentes simétricas de los voltajes están dadas por las siguientes expresiones, recordando que $\tilde{V}_b = \tilde{V}_c = Z_f (\tilde{I}_b + \tilde{I}_c)$:

$$\tilde{V}_{a_1} = \frac{1}{3} [\tilde{V}_a + a Z_f (\tilde{I}_b + \tilde{I}_c) + a^2 Z_f (\tilde{I}_b + \tilde{I}_c)]$$

$$\tilde{V}_{a_1} = \frac{1}{3} [\tilde{V}_a - Z_f (\tilde{I}_b + \tilde{I}_c)]$$

puesto que $a + a^2 = -1$

$$\tilde{V}_{a_2} = \frac{1}{3} [\tilde{V}_a + a^2 Z_f (\tilde{I}_b + \tilde{I}_c) + a Z_f (\tilde{I}_b + \tilde{I}_c)]$$

$$\tilde{V}_{a_2} = \frac{1}{3} [\tilde{V}_a - Z_f (\tilde{I}_b + \tilde{I}_c)]$$

De las ecuaciones anteriores resulta que

$$\tilde{V}_{a_1} = \tilde{V}_{a_2}$$

$$\tilde{V}_{a_0} = \frac{1}{3} [\tilde{V}_a + Z_f (\tilde{I}_b + \tilde{I}_c) + Z_f (\tilde{I}_b + \tilde{I}_c)]$$

$$\tilde{V}_{a_0} = \frac{1}{3} [\tilde{V}_a + 2Z_f (\tilde{I}_b + \tilde{I}_c)]$$

$$\tilde{V}_{a_1} - \tilde{V}_{a_0} = -Z_f (\tilde{I}_b + \tilde{I}_c)$$

y como $\tilde{I}_{a_0} = \frac{1}{3} (\tilde{I}_a + \tilde{I}_b + \tilde{I}_c)$ y para este tipo de falla $\tilde{I}_a = 0$

$$\tilde{I}_b + \tilde{I}_c = 3\tilde{I}_{a_0}$$

$$\tilde{V}_{a_1} = \tilde{V}_{a_0} - Z_f \tilde{I}_{a_0}$$

Las condiciones impuestas por las ecuaciones anteriores se satisfacen conectando los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero como se indica en la figura 1.23.

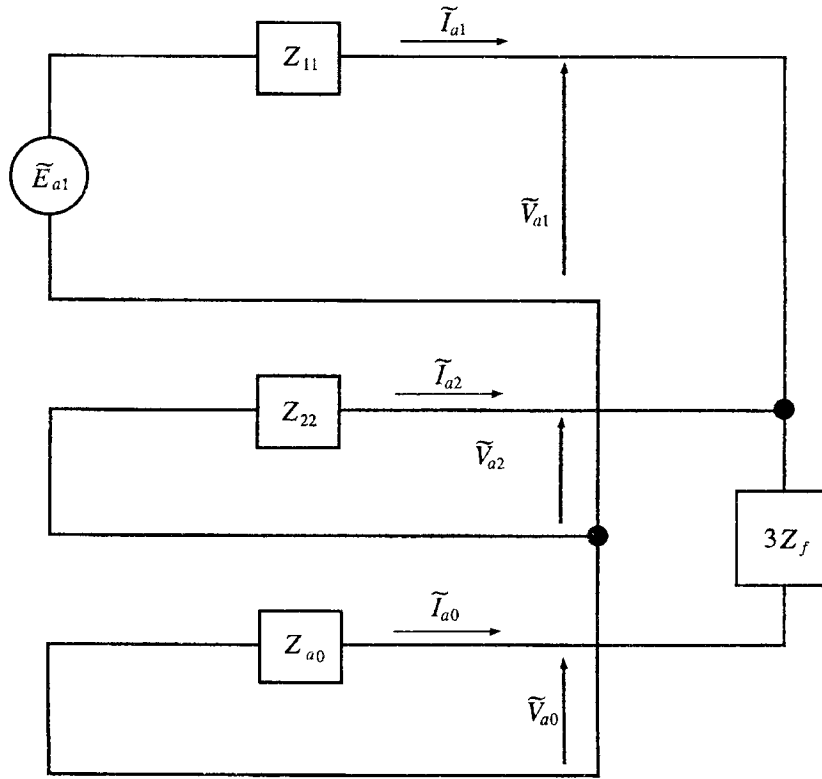


FIGURA 1.23 Conexión de los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero para el caso de una falla bifásica a tierra a través de una impedancia

Del circuito de la figura 1.23 se deduce

$$\tilde{I}_{a_1} = \frac{\tilde{E}_{a_1}}{Z_{11} + \frac{Z_{22}(Z_{00} + 3Z_f)}{Z_{22} + Z_{00} + 3Z_f}} = \frac{Z_{22} + Z_{00} + 3Z_f}{Z_{11}Z_{22} + Z_{11}Z_{00} + 3Z_{11}Z_f + Z_{22}Z_{00} + 3Z_{22}Z_f} \tilde{E}_{a_1}$$

$$\tilde{I}_{a_2} = -\tilde{I}_{a_1} \frac{Z_{00} + 3Z_f}{Z_{22} + Z_{00} + 3Z_f} = -\frac{Z_{00} + 3Z_f}{Z_{11}Z_{22} + Z_{11}Z_{00} + 3Z_{11}Z_f + Z_{22}Z_{00} + 3Z_{22}Z_f} \tilde{E}_{a_1}$$

$$\tilde{I}_{a_0} = -\tilde{I}_{a_1} \frac{Z_{22}}{Z_{22} + Z_{00} + 3Z_f} = -\frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} + Z_{11}Z_{00} + 3Z_{11}Z_f + Z_{22}Z_{00} + 3Z_{22}Z_f} \tilde{E}_{a_1}$$

$$\tilde{V}_{a_1} = \tilde{V}_{a_2} = \tilde{V}_{a_0} - 3Z_f \tilde{I}_{a_0}$$

$$\tilde{V}_{a_1} = \tilde{V}_{a_2} = \tilde{E}_{a_1} - Z_{11} \tilde{I}_{a_1} = \left[1 - \frac{Z_{11} (Z_{22} + Z_{00} + 3Z_f)}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + 3Z_{11} Z_f + Z_{22} Z_{00} + 3Z_{22} Z_f} \right] \tilde{E}_{a_1}$$

$$\tilde{V}_{a_1} = \tilde{V}_{a_2} = \frac{Z_{22} Z_{00} + 3Z_{22} Z_f}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + 3Z_{11} Z_f + Z_{22} Z_{00} + 3Z_{22} Z_f} \tilde{E}_{a_1}$$

$$\tilde{V}_{a_0} = \tilde{V}_{a_1} - 3Z_f \tilde{I}_{a_0} = \frac{Z_{22} Z_{00}}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + 3Z_{11} Z_f + Z_{22} Z_{00} + 3Z_{22} Z_f} \tilde{E}_{a_1}$$

Conocidas las componentes simétricas de la corriente de falla de la fase a y del voltaje al neutro de la fase a en el punto de falla pueden calcularse las corrientes $\tilde{I}_a$, $\tilde{I}_b$ e $\tilde{I}_c$ y los voltajes $\tilde{V}_a$, $\tilde{V}_b$ y $\tilde{V}_c$ de la siguiente manera:

$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = 0$$

$$\tilde{I}_b = a^2 \tilde{I}_{a_1} + a \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = \frac{(a^2 - 1)Z_{22} + (a^2 - a)Z_{00} + (a^2 - a)3Z_f}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + 3Z_{11} Z_f + Z_{22} Z_{00} + 3Z_{22} Z_f} \tilde{E}_{a_1}$$

$$\tilde{I}_c = a \tilde{I}_{a_1} + a^2 \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = \frac{(a - 1)Z_{22} + (a - a^2)Z_{00} + (a - a^2)3Z_f}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + 3Z_{11} Z_f + Z_{22} Z_{00} + 3Z_{22} Z_f} \tilde{E}_{a_1}$$

$$\tilde{V}_a = \tilde{V}_{a_1} + \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} = \frac{3Z_{22} Z_{00} + 6Z_{22} Z_f}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + 3Z_{11} Z_f + Z_{22} Z_{00} + 3Z_{22} Z_f} \tilde{E}_{a_1}$$

$$\tilde{V}_b = a^2 \tilde{V}_{a_1} + a \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} = \frac{-3Z_{22} Z_f}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + 3Z_{11} Z_f + Z_{22} Z_{00} + 3Z_{22} Z_f} \tilde{E}_{a_1}$$

$$\tilde{V}_c = a \tilde{V}_{a_1} + a^2 \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} = \frac{-3Z_{22} Z_f}{Z_{11} Z_{22} + Z_{11} Z_{00} + 3Z_{11} Z_f + Z_{22} Z_{00} + 3Z_{22} Z_f} \tilde{E}_{a_1}$$

1.5.5 Falla bifásica

La asimetría debida a la falla de aislamiento entre las fases b y c queda definida por las siguientes ecuaciones:

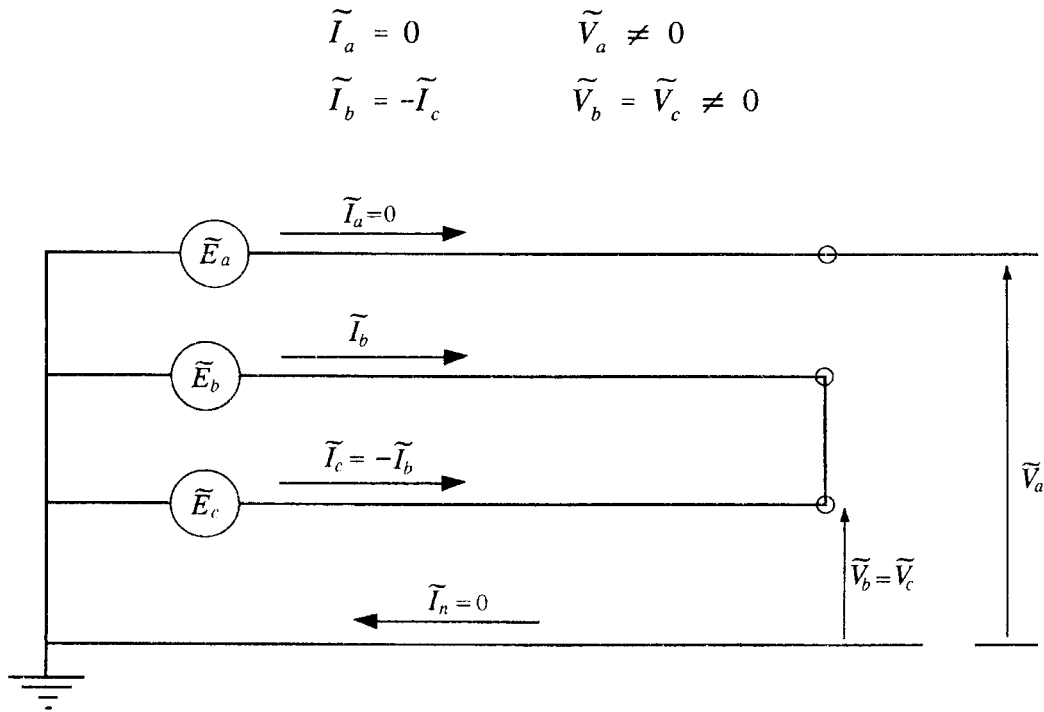


FIGURA 1.24 Falla bifásica

Las ecuaciones que definen el comportamiento del circuito trifásico en función de las componentes simétricas son

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{a_1} - \tilde{V}_{a_1} &= Z_{11} \tilde{I}_{a_1} \\ -\tilde{V}_{a_2} &= Z_{22} \tilde{I}_{a_2} \\ -\tilde{V}_{a_0} &= Z_{00} \tilde{I}_{a_0}\end{aligned}$$

En el punto de falla pueden escribirse las siguientes relaciones entre las cantidades de fase y sus componentes simétricas.

Puesto que no hay conexión a tierra en el punto de falla

$$\tilde{I}_{a_0} = 0$$

Se tiene también que

$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = 0$$

y por tanto, de las dos ecuaciones anteriores

$$-\tilde{I}_{a_1} = \tilde{I}_{a_2}$$

Los voltajes de secuencia positiva y negativa tienen los siguientes valores:

$$\tilde{V}_{a_1} = \frac{1}{3} (\tilde{V}_a + a \tilde{V}_b + a^2 \tilde{V}_c)$$

$$\tilde{V}_{a_2} = \frac{1}{3} (\tilde{V}_a + a^2 \tilde{V}_b + a \tilde{V}_c)$$

y como $\tilde{V}_b = \tilde{V}_c$

$$\tilde{V}_{a_1} = \frac{1}{3} [\tilde{V}_a + (a + a^2) \tilde{V}_c]$$

$$\tilde{V}_{a_2} = \frac{1}{3} [\tilde{V}_a + (a^2 + a) \tilde{V}_c]$$

y por tanto

$$\tilde{V}_{a_1} = \tilde{V}_{a_2}$$

Puesto que $\tilde{I}_{a_0} = 0$, no puede haber caídas de voltaje de secuencia cero y en consecuencia

$$\tilde{V}_{a_0} = 0$$

Las condiciones impuestas por las ecuaciones anteriores se satisfacen conectando los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero como se indica en la figura 1.25.

Del circuito de la figura 1.25 se deduce que

$$\tilde{I}_{a_1} = \frac{\tilde{E}_{a_1}}{Z_{11} + Z_{22}}$$

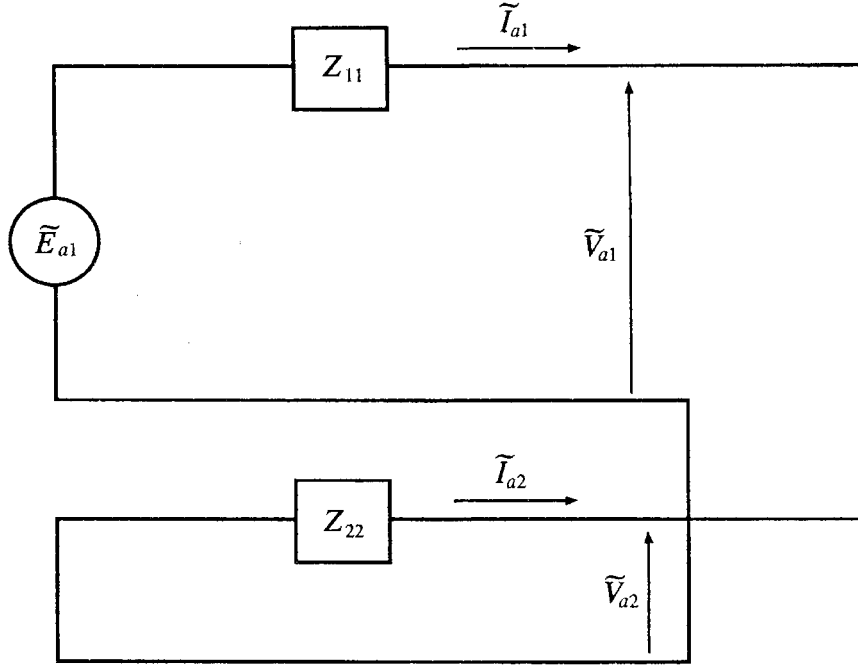


FIGURA 1.25 Conexión de los circuitos de secuencia positiva y negativa para el caso de una falla bifásica.

$$\tilde{I}_{a_2} = - \frac{\tilde{E}_{a_1}}{Z_{11} + Z_{22}}$$

$$\tilde{I}_{a_0} = 0$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{a_1} &= \tilde{V}_{a_2} = \tilde{E}_{a_1} - Z_{11} \tilde{I}_{a_1} = -Z_{22} \tilde{I}_{a_2} \\ &= \frac{Z_{22}}{Z_{11} + Z_{22}} \tilde{E}_{a_1} \\ \tilde{V}_{a_0} &= 0 \end{aligned}$$

Las corrientes $\tilde{I}_a$, $\tilde{I}_b$ y $\tilde{I}_c$ y los voltajes al neutro $\tilde{V}_a$, $\tilde{V}_b$ y $\tilde{V}_c$ en el punto de falla tienen los siguientes valores:

$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = 0$$

$$\tilde{I}_b = a^2 \tilde{I}_{a_1} + a \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = \frac{a^2 - a}{Z_{11} + Z_{22}} \tilde{E}_{a_1}$$

$$\tilde{I}_c = a \tilde{I}_{a_1} + a^2 \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = \frac{a - a^2}{Z_{11} + Z_{22}} \tilde{E}_{a_1}$$

$$\tilde{V}_a = \tilde{V}_{a_1} + \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} = \frac{2Z_{22}}{Z_{11} + Z_{22}} \tilde{E}_{a_1}$$

$$\tilde{V}_b = a^2 \tilde{V}_{a_1} + a \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} = (a^2 + a) \frac{Z_{22}}{Z_{11} + Z_{22}} \tilde{E}_{a_1} = -\frac{Z_{22}}{Z_{11} + Z_{22}} \tilde{E}_{a_1}$$

$$\tilde{V}_c = a \tilde{V}_{a_1} + a^2 \tilde{V}_{a_2} + \tilde{V}_{a_0} = (a + a^2) \frac{Z_{22}}{Z_{11} + Z_{22}} \tilde{E}_{a_1} = -\frac{Z_{22}}{Z_{11} + Z_{22}} \tilde{E}_{a_1}$$

1.5.6 Falla bifásica a través de una impedancia

La asimetría debida a la falla de aislamiento entre las fases b y c queda definida por la siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_a &= 0 & \tilde{V}_a &\neq 0 \\ \tilde{I}_b &= -\tilde{I}_c & \tilde{V}_c &= \tilde{V}_b - Z_f \tilde{I}_b \end{aligned}$$

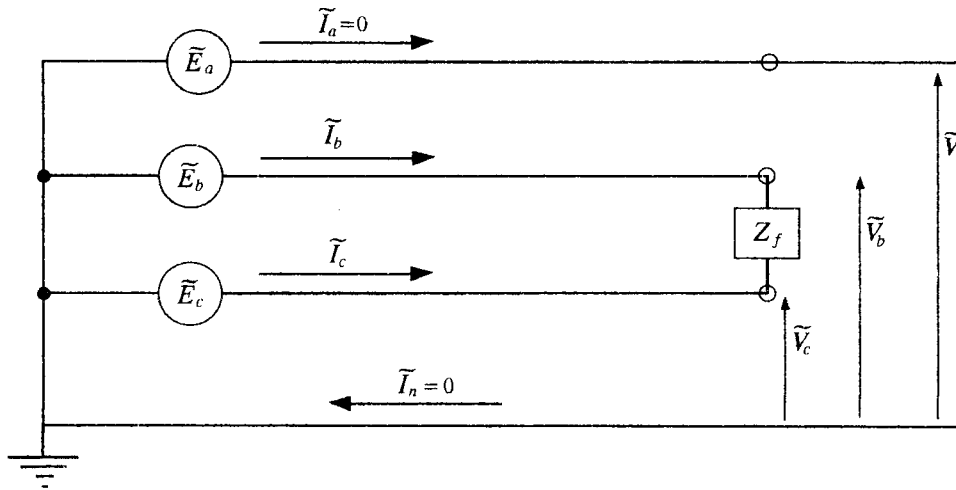


FIGURA 1.26 Falla bifásica a través de una impedancia

Las ecuaciones que definen el comportamiento del circuito trifásico en función de las componentes simétricas son

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{a_1} - \tilde{V}_{a_1} &= Z_{11} \tilde{I}_{a_1} \\ - \tilde{V}_{a_2} &= Z_{22} \tilde{I}_{a_2} \\ - \tilde{V}_{a_0} &= Z_{00} \tilde{I}_{a_0}\end{aligned}$$

En el punto de falla pueden escribirse las siguientes relaciones entre las cantidades de fase y sus componentes simétricas

$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = 0$$

Pero $\tilde{I}_{a_0} = 0$, ya que no hay conexión a tierra en el punto de falla; por tanto

$$\tilde{I}_{a_1} = -\tilde{I}_{a_2}$$

Los voltajes de secuencia positiva y negativa tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{a_1} &= \frac{1}{3} [\tilde{V}_a + a \tilde{V}_b + a^2 (\tilde{V}_b - Z_f \tilde{I}_b)] = \frac{1}{3} [\tilde{V}_a + (a + a^2) \tilde{V}_b - a^2 Z_f \tilde{I}_b] \\ \tilde{V}_{a_2} &= \frac{1}{3} [\tilde{V}_a + a^2 \tilde{V}_b + a (\tilde{V}_b - Z_f \tilde{I}_b)] = \frac{1}{3} [\tilde{V}_a + (a + a^2) \tilde{V}_b - a Z_f \tilde{I}_b]\end{aligned}$$

Restando de la primera ecuación anterior la segunda

$$\tilde{V}_{a_1} - \tilde{V}_{a_2} = \frac{1}{3} (a - a^2) Z_f \tilde{I}_b = j \frac{\sqrt{3}}{3} Z_f \tilde{I}_b$$

Pero

$$\tilde{I}_b = a^2 \tilde{I}_{a_1} + a \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = (a^2 - a) \tilde{I}_{a_1} = -j \sqrt{3} \tilde{I}_{a_1}$$

Sustituyendo este valor de $\tilde{I}_b$ en la ecuación anterior

$$\tilde{V}_{a_1} - \tilde{V}_{a_2} = Z_f \tilde{I}_{a_1}$$

Las condiciones impuestas por las ecuaciones anteriores se satisfacen conectando los circuitos equivalentes de secuencia positiva y negativa como se indica en la figura 1.27.

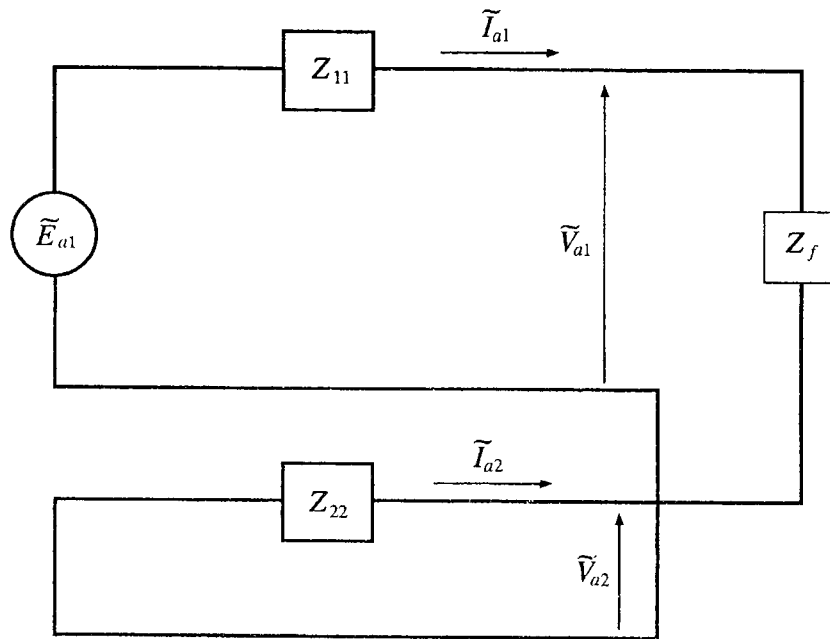


FIGURA 1.27 Conexión de los circuitos de secuencia positiva y negativa para el caso de una falla bifásica a través de una impedancia

1.5.7 Falla trifásica

En la figura 1.28 se representa una falla trifásica que pone en cortocircuito las tres fases de la línea de transmisión.

En este caso la falla no introduce ningún desequilibrio en el sistema trifásico y por tanto no existen corrientes ni voltajes de secuencia negativa ni de secuencia cero, independientemente de que la falla trifásica esté conectada a tierra o no. Todas las cantidades que intervienen en el cálculo son de secuencia positiva.

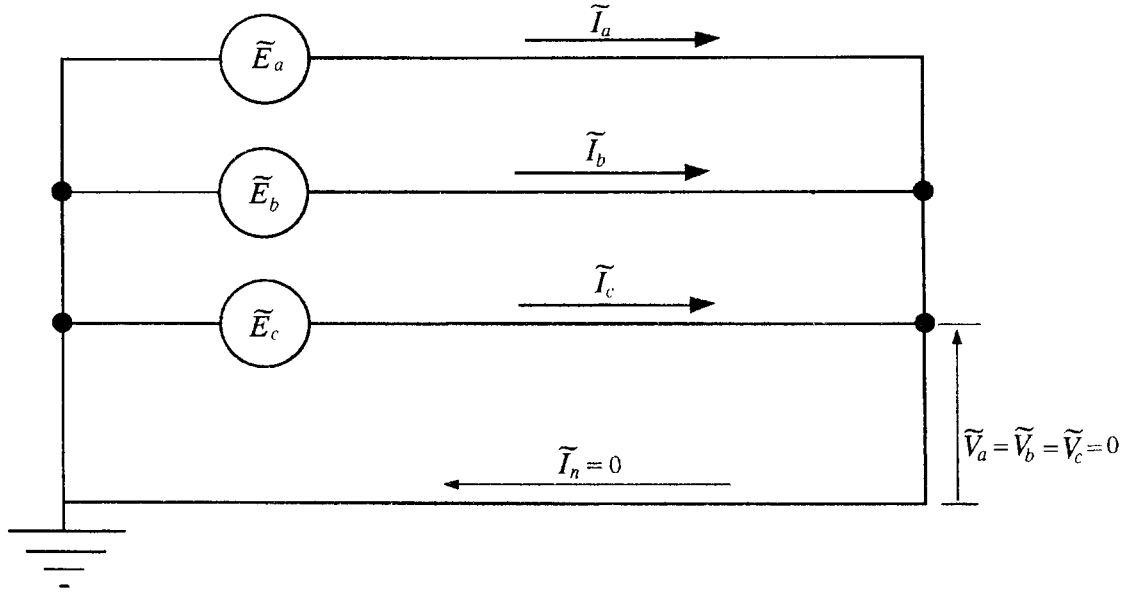


FIGURA 1.28 Falla trifásica

En el punto de falla se verifica que

$$\tilde{I}_a + \tilde{I}_b + \tilde{I}_c = 0 \quad \tilde{I}_b = a^2 \tilde{I}_a \quad \tilde{I}_c = a \tilde{I}_a$$

$$\tilde{V}_a = \tilde{V}_b = \tilde{V}_c = 0$$

Las ecuaciones que definen el comportamiento del circuito trifásico en función de las componentes simétricas se reducen en este caso a

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{a_1} - \tilde{V}_{a_1} &= Z_{11} \tilde{I}_{a_1} \\ - \tilde{V}_{a_2} &= Z_{22} \tilde{I}_{a_2} = 0 \\ - \tilde{V}_{a_0} &= Z_{00} \tilde{I}_{a_0} = 0 \end{aligned}$$

En el punto de falla se tienen las siguientes relaciones entre las cantidades de fase y sus componentes simétricas.

$$\tilde{I}_{a_1} = \frac{1}{3} (\tilde{I}_a + a\tilde{I}_b + a^2\tilde{I}_c) = \frac{1}{3} (\tilde{I}_a + a^3\tilde{I}_a + a^3\tilde{I}_a) = \tilde{I}_a$$

$$\tilde{V}_{a_1} = \frac{1}{3} (\tilde{V}_a + a\tilde{V}_b + a^2\tilde{V}_c) = 0$$

Las condiciones impuestas por la falla trifásica se satisfacen conectando el circuito de secuencia positiva como se muestra en la figura 1.29.

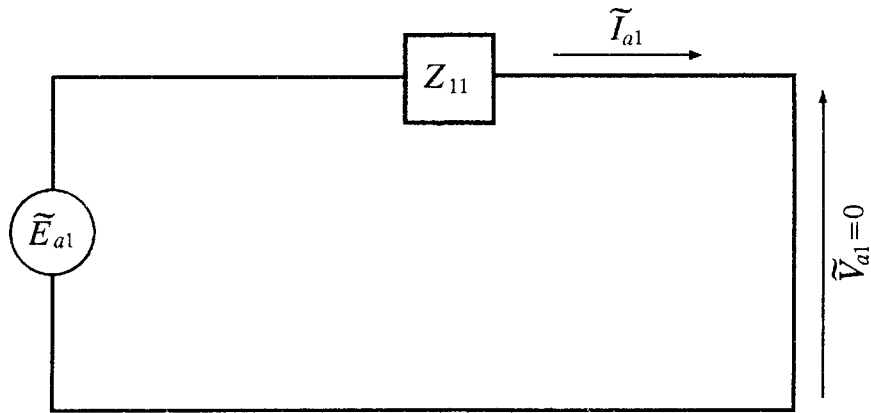


FIGURA 1.29 Conexión del circuito de secuencia positiva para el caso de una falla trifásica

En el circuito de la figura 1.29 se verifica que

$$\tilde{I}_{a_1} = \frac{\tilde{E}_{a_1}}{Z_{11}}$$

como

$$\tilde{I}_{a_2} = 0$$

$$\tilde{I}_{a_0} = 0$$

se tiene

$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_{a_1}$$

$$\tilde{I}_b = a^2\tilde{I}_{a_1}$$

$$\tilde{I}_c = a\tilde{I}_{a_1}$$

$$\begin{aligned}\tilde{V}_a &= \tilde{V}_{a_1} = 0 \\ \tilde{V}_b &= a^2 \tilde{V}_{a_1} = 0 \\ \tilde{V}_c &= a \tilde{V}_{a_1} = 0\end{aligned}$$

EJEMPLO 1.4

Un alternador trifásico de 25 MVA y voltaje nominal entre líneas de 13.8 kV, conectado en estrella con el neutro directamente a tierra, alimenta las barras colectoras de una subestación de la que salen varios alimentadores trifásicos. En uno de los alimentadores ocurre un cortocircuito a diez kilómetros de la subestación.

Las impedancias de secuencia positiva, negativa y cero por fase del alimentador, para una longitud de 10 km, son

$$\begin{aligned}Z_{L_1} &= Z_{L_2} = 2.4 + j4.84 \, \Omega \\ Z_{L_0} &= 3.9 + j12.23 \, \Omega\end{aligned}$$

Supóngase que cuando ocurre el cortocircuito no hay ninguna carga conectada y que el generador mantiene un voltaje entre líneas en sus terminales de 13.8 kV (se supone un generador ideal, como se señaló anteriormente).

Calcúlense las corrientes de cortocircuito para los siguientes casos:

- a) Cortocircuito trifásico
- b) Cortocircuito bifásico
- c) Cortocircuito monofásico a tierra

SOLUCIÓN

- a) Cálculo de las corrientes de cortocircuito trifásico, figura 1.30.

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{a_1} &= \frac{13800}{\sqrt{3}} = 7963 \angle 0^\circ \text{ V} \\ Z_{11} &= 2.4 + j4.84 \, \Omega\end{aligned}$$

$$\tilde{I}_{a_1} = \frac{\tilde{E}_{a_1}}{\tilde{Z}_{11}} = \frac{7\,968 \angle 0^\circ}{540 \angle 64.5^\circ} = 1\,476 \angle -63.6^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_{a_1} = 1\,476 \angle -63.6^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_b = a^2 \tilde{I}_{a_1} = 1\,476 \angle 174.4^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_c = a \tilde{I}_{a_1} = 1\,476 \angle 56.4^\circ \text{ A}$$

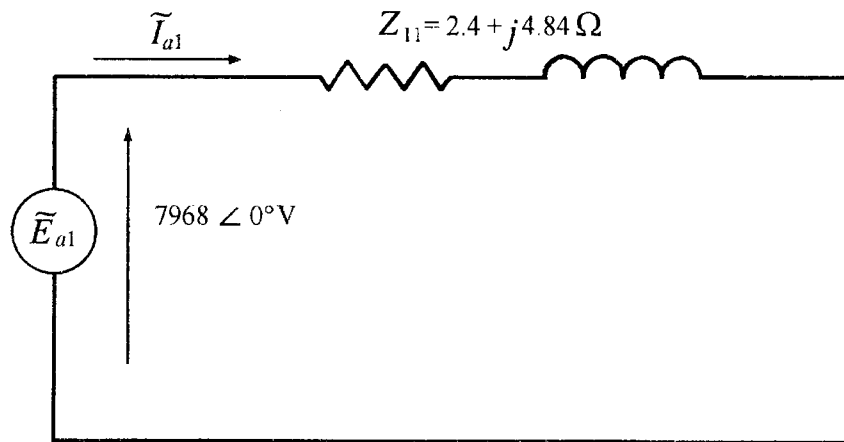


FIGURA 1.30 Cortocircuito trifásico

b) Cálculo de las corrientes de cortocircuito bifásico, figura 1.31.

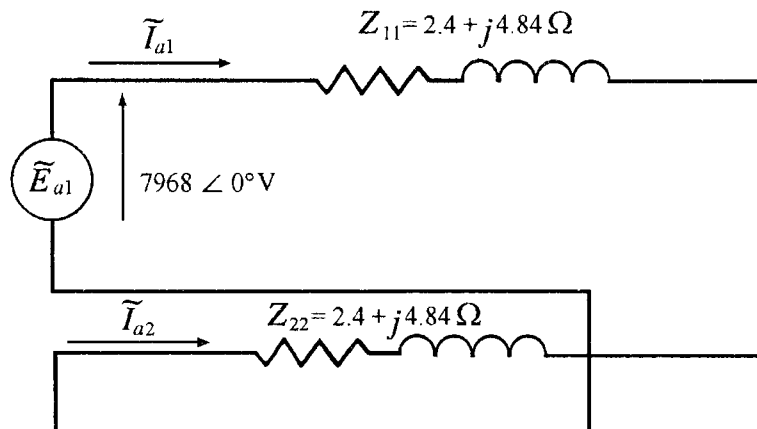


FIGURA 1.31 Cortocircuito bifásico

$$\tilde{E}_{a_1} = \frac{13\,800}{\sqrt{3}} = 7\,968 \text{ V}$$

$$Z_{11} = 2.4 + j4.84 \, \Omega$$

$$Z_{22} = 2.4 + j4.84 \, \Omega$$

$$Z_{11} + Z_{22} = 4.8 + j9.68 = 10.8 \angle 63.6^\circ$$

$$\tilde{I}_{a_1} = -\tilde{I}_{a_2} = \frac{7\,968 \angle 0^\circ}{10.8 \angle 63.6^\circ} = 737.8 \angle -63.6^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{a_0} = 0$$

$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = 737.8 \angle -63.6^\circ - 737.8 \angle -63.6^\circ + 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_b &= a^2 \tilde{I}_{a_1} + a \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = (a^2 - a) 737.8 \angle -63.6^\circ \\ &= \sqrt{3} \angle -90^\circ \times 737.8 \angle -63.6^\circ = 1278 \angle -153.6^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_c &= a \tilde{I}_{a_1} + a^2 \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = (a - a^2) 737.8 \angle -63.6^\circ \\ &= \sqrt{3} \angle 90^\circ \times 737.8 \angle -63.6^\circ = 1\,278 \angle 26.4^\circ \end{aligned}$$

c) Cálculo de la corriente de cortocircuito monofásico a tierra, figura 1.32.

$$\tilde{E}_{a_1} = \frac{13\,800}{\sqrt{3}} = 7\,968 \text{ V}$$

$$Z_{11} = 2.4 + j4.84 \, \Omega$$

$$Z_{22} = 2.4 + j4.84 \, \Omega$$

$$Z_{00} = 3.9 + j12.23 \, \Omega$$

$$\tilde{I}_{a_1} = \tilde{I}_{a_2} = \tilde{I}_{a_0} = \frac{\tilde{E}_{a_1}}{Z_{11} + Z_{22} + Z_{00}} = \frac{7\,968 \angle 0^\circ}{8.7 + j21.91} = \frac{7\,968 \angle 0^\circ}{23.57 \angle 68.3^\circ} = 338 \angle -68.3^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = 3\tilde{I}_{a_1} = 1\,014 \angle -68.3^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_b = 0 ; \tilde{I}_c = 0$$

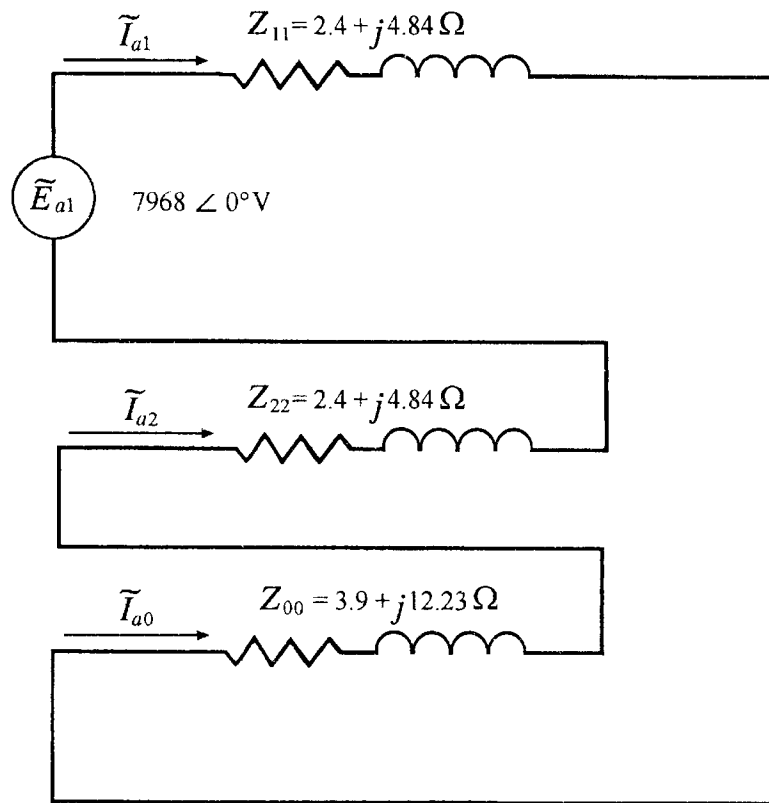


FIGURA 1.32 Cortocircuito monofásico a tierra

CAPÍTULO 2

IMPEDANCIAS DE SECUENCIA POSITIVA, NEGATIVA Y CERO DE LAS LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

2.1 Impedancias inductivas de un circuito trifásico con regreso por tierra

En el capítulo anterior se consideró el caso de un circuito trifásico formado por tres conductores de fase y un neutro. En caso de desequilibrio entre las corrientes, la corriente resultante regresa por el neutro.

Considérese ahora el caso en que la corriente resultante del desequilibrio regresa por tierra. El retorno por tierra se hará por una serie de caminos irregulares y de sección variable; sin embargo, partiendo de la suposición de que la tierra tiene resistividad uniforme y es de extensión infinita, puede sustituirse el circuito real a través de tierra por otro ideal, constituido por un conductor ficticio, colocado bajo tierra a una distancia D_e de los conductores de la línea, que es función de la resistividad del terreno y la frecuencia

$$D_e = 658 \sqrt{\frac{\rho}{f}} \text{ m} \quad (2.1)$$

donde

ρ resistividad del terreno, Ω/m

f frecuencia, ciclos por segundo

Esta solución aproximada, derivada de una simplificación de la teoría de Carson¹, permite asimilar el caso de un circuito trifásico con regreso por tierra al caso ya estudiado de un circuito trifásico con conductor neutro de regreso.

¹ Carson, J. R., Wave propagation in overhead wires with ground return. *The Bell Technical Journal*, volumen V, octubre de 1926, p. 529-554.

2.1.1 Impedancias inductivas propias y mutuas

Considérese el circuito trifásico de la figura 2.1, formado por tres conductores

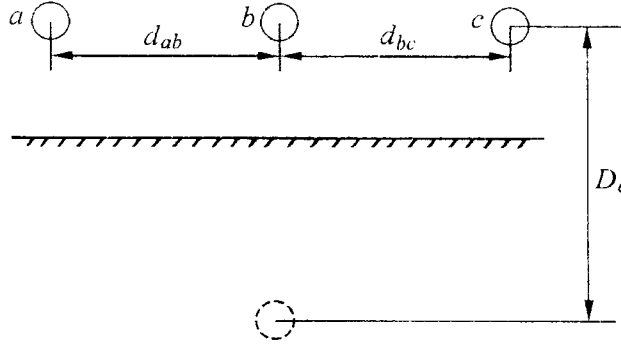


FIGURA 2.1 Circuito trifásico con retorno por tierra

De acuerdo con la teoría de Carson, las impedancias propias de los conductores, incluyendo el efecto del circuito de tierra, son

$$Z_{aa-n} = (R_{aa} + 0.000988f + \Delta R_{aa-n}) + j \left(0.002892f \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{r_{aa}} + \Delta X_{aa-n} \right) \Omega/\text{km} \quad (2.2)$$

$$Z_{bb-n} = (R_{bb} + 0.000988f + \Delta R_{bb-n}) + j \left(0.002892f \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{r_{bb}} + \Delta X_{bb-n} \right) \Omega/\text{km} \quad (2.3)$$

$$Z_{cc-n} = (R_{cc} + 0.000988f + \Delta R_{cc-n}) + j \left(0.002892f \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{r_{cc}} + \Delta X_{cc-n} \right) \Omega/\text{km} \quad (2.4)$$

donde

$R_{aa} = R_{bb} = R_{cc}$ resistencia de los conductores, Ω/km

$r_{aa} = r_{bb} = r_{cc}$ radio medio geométrico de los conductores, m

f frecuencia, ciclos por segundo

ρ resistividad del terreno, Ω/m^3

$$-\Delta R_{aa-n} = \Delta X_{aa-n} = 1.015f \frac{h_a}{\sqrt{\rho/f}} \times 10^{-6} \quad \Omega/\text{km} \quad (2.5)$$

$$-\Delta R_{bb-n} = \Delta X_{bb-n} = 1.015f \frac{h_b}{\sqrt{\rho/f}} \times 10^{-6} \quad \Omega/\text{km} \quad (2.6)$$

$$-\Delta R_{cc-n} = \Delta X_{cc-n} = 1.015f \frac{h_c}{\sqrt{\rho/f}} \times 10^{-6} \quad \Omega/\text{km} \quad (2.7)$$

h_a altura del conductor a sobre el suelo, m

h_b altura del conductor b sobre el suelo, m

h_c altura del conductor c sobre el suelo, m

Las impedancias mutuas entre conductores, incluyendo el efecto del circuito de tierra, son

$$Z_{ab-n} = 0.000988f + \Delta R_{ab-n} + j \left(0.002892f \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{d_{ab}} + \Delta X_{ab-n} \right) \quad \Omega/\text{km} \quad (2.8)$$

$$Z_{ac-n} = 0.000988f + \Delta R_{ac-n} + j \left(0.002892f \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{d_{ac}} + \Delta X_{ac-n} \right) \quad \Omega/\text{km} \quad (2.9)$$

$$Z_{bc-n} = 0.000988f + \Delta R_{bc-n} + j \left(0.002892f \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{d_{bc}} + \Delta X_{bc-n} \right) \quad \Omega/\text{km} \quad (2.10)$$

donde

d_{ab} distancia entre los conductores a y b , m

d_{ac} distancia entre los conductores a y c , m

d_{bc} distancia entre los conductores b y c , m

$$-\Delta R_{ab-n} = \Delta X_{ab-n} = 1.015f \frac{h_a + h_b}{2 \sqrt{\rho/f}} \times 10^{-6} \quad \Omega/\text{km} \quad (2.11)$$

$$-\Delta R_{ac-n} = \Delta X_{ac-n} = 1.015f \frac{h_a + h_c}{2 \sqrt{\rho/f}} \times 10^{-6} \quad \Omega/\text{km} \quad (2.12)$$

$$-\Delta R_{bc-n} = \Delta X_{bc-n} = 1.015f \frac{h_b + h_c}{2 \sqrt{\rho/f}} \times 10^{-6} \quad \Omega/\text{km} \quad (2.13)$$

En las ecuaciones 2.2, 2.3 y 2.4, la resistencia está constituida por la resistencia del conductor más la resistencia del circuito por tierra, que de acuerdo con la teoría de Carson, es igual a $0.000988 f + \Delta R_{aa-n}$. El término ΔR_{aa-n} es generalmente despreciable; en tal caso, la resistencia de tierra resulta independiente de la resistividad del terreno. Esto puede explicarse en la siguiente forma: un aumento de la resistividad del terreno produce una profundidad mayor del circuito de regreso por tierra y en consecuencia una sección del circuito de regreso más grande.

En las ecuaciones 2.2, 2.3, 2.4, 2.8, 2.9 y 2.10, la expresión

$$658 \sqrt{\rho/f}$$

es la profundidad equivalente del regreso por tierra D_e .

La resistividad del terreno depende del tipo del terreno y del grado de humedad que contenga. En la práctica suele estar comprendida entre un mínimo de $10 \Omega/\text{m}^3$ y $1000 \Omega/\text{m}^3$. Para estos valores extremos y para una frecuencia de 50 ciclos por segundo (c.p.s.), la profundidad equivalente de regreso tiene los siguientes valores:

Para $\rho = 10 \Omega/\text{m}^3$ y $f = 50$ c.p.s.

$$D_e = 658 \sqrt{10/50} = 294.3 \text{ m}$$

Para $\rho = 1\,000 \Omega/\text{m}^3$ y $f = 50$ c.p.s.

$$D_e = 658 \sqrt{1\,000/50} = 2\,943 \text{ m}$$

Puede verse que D_e es mucho mayor que la altura de los conductores de una línea de transmisión sobre el piso. Esto explica que las reactancias propias y mutuas de los conductores, incluyendo el efecto del circuito de tierra, sean prácticamente independientes de la altura de los conductores sobre el piso; los términos X_{aa-n} , X_{ab-n} , etc., que son función de la altura, son generalmente despreciables.

2.1.2 Impedancias inductivas de secuencias positiva, negativa y cero

Como se vio en el capítulo anterior, las impedancias de secuencia positiva, negativa y cero están dadas por las siguientes expresiones:

$$Z_{11} = Z_{22} = \frac{1}{3}(Z_{aa-n} + Z_{bb-n} + Z_{cc-n}) - \frac{1}{3}(Z_{ab-n} + Z_{ac-n} + Z_{bc-n}) \quad (2.14)$$

$$Z_{00} = \frac{1}{3}(Z_{aa-n} + Z_{bb-n} + Z_{cc-n}) + \frac{2}{3}(Z_{ab-n} + Z_{ac-n} + Z_{bc-n}) \quad (2.15)$$

$$Z_{12} = \frac{1}{3}(Z_{aa-n} + Z_{bb-n}a^2 + Z_{cc-n}a) + \frac{2}{3}(Z_{ab-n}a + a^2Z_{ac-n} + Z_{bc-n}) \quad (2.16)$$

$$Z_{21} = \frac{1}{3}(Z_{aa-n} + Z_{bb-n}a + Z_{cc-n}a^2) + \frac{2}{3}(Z_{ab-n}a^2 + aZ_{ac-n} + Z_{bc-n}) \quad (2.17)$$

$$Z_{10} = Z_{02} = \frac{1}{3}(Z_{aa-n} + Z_{bb-n}a + Z_{cc-n}a^2) - \frac{1}{3}(Z_{ab-n}a + a^2Z_{ac-n} + Z_{bc-n}) \quad (2.18)$$

$$Z_{20} = Z_{01} = \frac{1}{3}(Z_{aa-n} + Z_{bb-n}a^2 + Z_{cc-n}a) - \frac{1}{3}(Z_{ab-n}a + Z_{ac-n}a^2 + Z_{bc-n}) \quad (2.19)$$

que se reducen a

$$Z_{11} = Z_{22} = Z_{aa-n} - Z_{ab-n}$$

$$Z_{00} = Z_{aa-n} + 2Z_{ab-n}$$

Si $Z_{aa-n} = Z_{bb-n} = Z_{cc-n}$ y $Z_{ab-n} = Z_{ac-n} = Z_{bc-n}$, dadas por las ecuaciones 2.2 a 2.4 y 2.8 a 2.10. Se obtienen los siguientes resultados:

Impedancia propia de secuencia positiva y negativa

$$Z_{11} = Z_{22} = R + j 0.002892 f \log_{10} \frac{\sqrt[3]{d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc}}}{r_g} \Omega/\text{km} \quad (2.20)$$

donde

$$\begin{aligned} R &= R_{aa} = R_{bb} = R_{cc} && \text{resistencia efectiva de cada conductor} \\ r_g &= r_{aa} = r_{bb} = r_{cc} && \text{radio medio geométrico de cada conductor} \\ \sqrt[3]{d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc}} &&& \text{distancia media geométrica entre conductores} \end{aligned}$$

Impedancia propia de secuencia cero

$$\begin{aligned} Z_{00} &= R + 3 \times 0.000988 f + \Delta R_{00} + j \left[0.002892 f \log_{10} \frac{(658 \sqrt{\rho/f})^3}{r_g (d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc})^{2/3}} + \Delta X_{00} \right] \Omega/\text{km} \\ Z_{00} &= R + 0.002964 f + \Delta R_{00} + j \left[0.008676 f \log_{10} \frac{658 \sqrt{\rho/f}}{\sqrt[3]{r_g (d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc})^{2/3}}} + \Delta X_{00} \right] \Omega/\text{km} \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde

$$-\Delta R_{00} = \Delta X_{00} = 1.015 f \frac{h_a + h_b + h_c}{\sqrt{\rho/f}} \times 10^{-6} \Omega/\text{km} \quad (2.22)$$

y $\sqrt[3]{r_g (d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc})^{2/3}}$ es el radio medio geométrico del conjunto de tres conductores.

En forma análoga pueden obtenerse las impedancias mutuas entre secuencias. En líneas de transmisión en las que no existen transposiciones, estas impedancias mutuas son distintas de cero, pero generalmente de valor muy pequeño, lo que permite despreciarlas.

Si existen transposiciones entre los tres conductores de la línea, las impedancias mutuas entre secuencias son iguales a cero, como se vio en el capítulo anterior. En este caso las autoimpedancias de secuencia positiva y negativa están dadas por la expresión

$$Z_{11} = Z_{22} = Z_{aa-n} - Z_{ab-n} \quad (2.23)$$

Sustituyendo en la ecuación 2.3 los valores de Z_{aa-n} y Z_{ab-n} dados por las ecuaciones 2.2 y 2.8 y teniendo en cuenta que cada conductor de la línea ocupa sucesivamente las tres posiciones posibles, se obtiene la misma ecuación 2.20 que se obtuvo para las impedancias de secuencia positiva y negativa de una línea sin transposición.

Se vio también en el capítulo anterior que, si existen transposiciones, la impedancia propia de secuencia cero está dada por la expresión

$$Z_{00} = Z_{aa-n} + 2Z_{ab-n} \quad (2.24)$$

Sustituyendo en esta expresión los valores de Z_{aa-n} y Z_{ab-n} se obtiene la misma ecuación 2.21 que se halló para el caso general.

Los términos de corrección están dados por

$$- \Delta R_{00} = \Delta X_{00} = 1.015 f \frac{3h_m}{\sqrt{\rho/f}} \times 10^{-6} \quad \Omega/\text{km}$$

donde

$$h_m = \frac{h_a + h_b + h_c}{3}$$

h_m es la altura media de cada conductor, ya que, debido a la existencia de transposiciones, cada conductor ocupa sucesivamente las tres posiciones posibles.

Como ya se vio en el capítulo 1, si existen transposiciones, las impedancias mutuas entre secuencias son iguales a cero.

2.1.3 Relación entre la corriente de tierra y las corrientes de secuencia cero

Considérese el circuito trifásico de la figura 2.2. En dicho circuito se verifica que

$$I_n = I_a + I_b + I_c$$

Desde el punto de vista de la circulación de la corriente de tierra, un circuito trifásico como el de la figura 2.2, en el que existen transposiciones entre los tres conductores, puede reducirse a un circuito monofásico de un conductor equivalente, constituido por los tres conductores en paralelo con regreso por tierra. Si no existen transposiciones, la corriente de tierra no se

distribuirá uniformemente entre los tres conductores; sin embargo, el error que se comete al considerar las tres componentes de la corriente de tierra igual es generalmente despreciable.

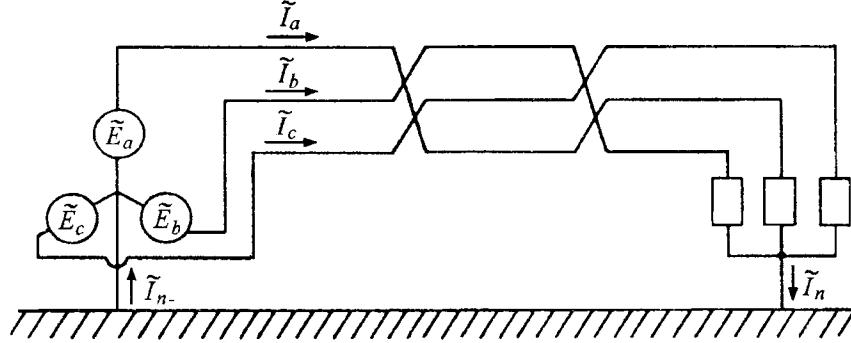


FIGURA 2.2 Circuito trifásico con retorno por tierra

De acuerdo con la teoría de Carson, la impedancia propia del conductor equivalente formado por los tres conductores en paralelo con regreso común por tierra está dada por las siguientes expresiones:

$$Z_{p-n} = \frac{R}{3} + 0.000988f + \Delta R_{p-n} + j \left(0.002892f \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{r_p} + \Delta X_{p-n} \right) \Omega/\text{km} \quad (2.25)$$

$$- \Delta R_{p-n} = \Delta X_{p-n} = 1.015f \frac{h_m}{\sqrt{\rho/f}} \times 10^{-6} \Omega/\text{km} \quad (2.26)$$

$$r_p = \sqrt[9]{r_g^3 d_{ab}^2 d_{ac}^2 d_{bc}^2}$$

$$r_p = \sqrt[3]{r_g (d_{ab} d_{ac} d_{bc})^{2/3}} \quad (2.27)$$

$$r_p = \sqrt[3]{r_g (DMG_{abc})^2}$$

donde

R	resistencia de cada conductor
r_g	radio medio geométrico de cada conductor
r_p	radio medio geométrico del conjunto de tres conductores
DMG_{abc}	distancia media geométrica entre los tres conductores

El circuito trifásico con retorno por tierra puede sustituirse, en lo que se refiere a la circulación de corriente de tierra, por el circuito equivalente monofásico mostrado en la figura 2.3.

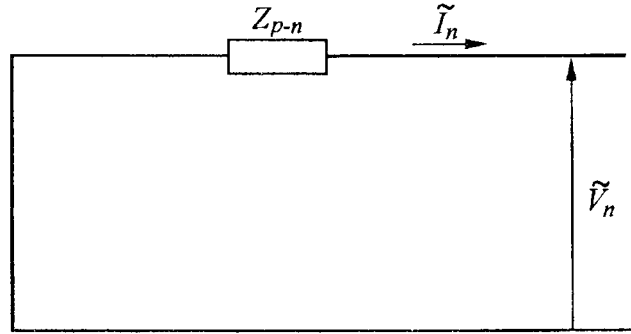


FIGURA 2.3 Circuito equivalente de un circuito trifásico con regreso por tierra

Por otra parte, comparando la ecuación 2.25 con la 2.21, resulta

$$Z_{00} = 3 Z_{p-n} \quad (2.28)$$

El circuito equivalente de secuencia cero, correspondiente al circuito trifásico de la figura 2.2, se muestra en la figura 2.4.

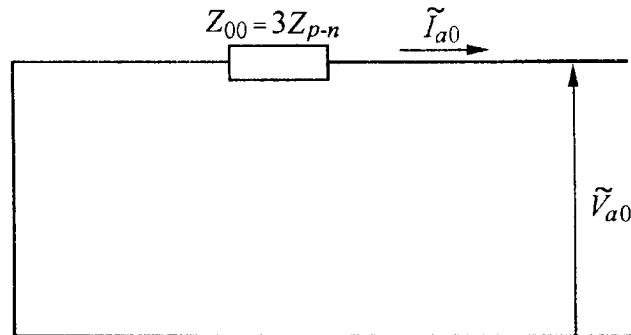


FIGURA 2.4 Circuito equivalente de secuencia cero

De acuerdo con la teoría de las componentes simétricas

$$\begin{aligned} \tilde{I}_n &= \tilde{I}_a + \tilde{I}_b + \tilde{I}_c \\ \tilde{I}_n &= (\tilde{I}_{a1} + \tilde{I}_{a2} + \tilde{I}_{a0}) + (\tilde{I}_{b1} + \tilde{I}_{b2} + \tilde{I}_{b0}) + (\tilde{I}_{c1} + \tilde{I}_{c2} + \tilde{I}_{c0}) \end{aligned}$$

Las corrientes de secuencia positiva y negativa constituyen sistemas trifásicos equilibrados y, por tanto, no contribuyen a la corriente de tierra. En efecto,

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{a1} + \tilde{I}_{b1} + \tilde{I}_{c1} &= 0 \\ \tilde{I}_{a2} + \tilde{I}_{b2} + \tilde{I}_{c2} &= 0\end{aligned}$$

Se verifica que

$$I_n = I_{a0} + I_{b0} + I_{c0} = 3\tilde{I}_{a0} \quad (2.29)$$

En el circuito equivalente de la figura 2.3 se tiene

$$Z_{p^{-n}} \tilde{I}_n = \tilde{V}_n$$

y en el circuito equivalente de la figura 2.4

$$Z_{00} \tilde{I}_{n0} = \tilde{V}_{a0}$$

Como

$$Z_{00} = 3Z_{p^{-n}} \quad \text{e} \quad \tilde{I}_{a0} = \frac{1}{3} \tilde{I}_n$$

$$Z_{p^{-n}} \tilde{I}_n = Z_{00} \tilde{I}_{a0}$$

y en consecuencia

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_{a0} \quad (2.30)$$

2.2 Impedancias inductivas de secuencia cero

2.2.1 Impedancia inductiva de secuencia cero de un circuito trifásico sin cables de guarda

Como se vio en la sección anterior, con respecto a la circulación de secuencia cero, un circuito trifásico puede reducirse a un circuito monofásico equivalente constituido por un conductor equivalente, que resulta de combinar los conductores de fase y con regreso por tierra, como se indica en la figura 2.5. En este caso la impedancia de secuencia cero está dada por la ecuación 2.21.

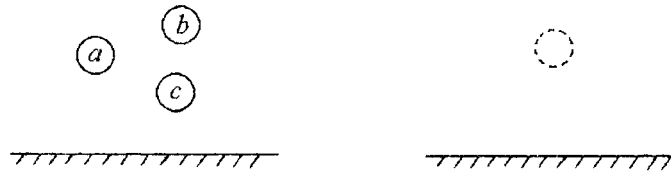


FIGURA 2.5 Reducción de un circuito trifásico a un circuito monofásico con regreso por tierra para el cálculo de la impedancia de secuencia cero

EJEMPLO 2.1

Cálculo de la impedancia inductiva de secuencia cero del circuito trifásico de la figura 2.6, formado por tres conductores de aluminio, en dos capas, 7 hilos de acero. El diámetro exterior del conductor es de 2.048 cm y la resistencia efectiva es 0.146 Ω/km . La frecuencia del sistema es de 50 ciclos por segundo y la resistividad del terreno puede considerarse de 100 $\Omega/\text{m}/\text{m}^2$.

SOLUCIÓN

$$Z_{00p} = R + 0.00294f + \Delta R_{00p} + j0.0086f \log_{10} \frac{658 \sqrt{\rho/f}}{\sqrt[3]{r(DMG_{abc})^2}} + \Delta X_{00p} \quad \Omega/\text{km}$$

El radio medio geométrico de cada conductor es

$$r = 1.024 \times 0.826 = 0.85 \text{ cm}$$

La distancia media geométrica entre los tres conductores es

$$DMG_{abc} = \sqrt[3]{2.603 \times 2.603 \times 4.876} = 3.200 \text{ m}$$

El radio medio geométrico del conductor ficticio equivalente a los tres conductores es

$$\sqrt[3]{r(DMG_{abc})^2} = \sqrt[3]{0.85 \times 320^2} = 44.2 \text{ cm}$$

La profundidad equivalente del regreso por tierra es

$$D_e = 658 \sqrt{100/50} = 930.5 \text{ m}$$

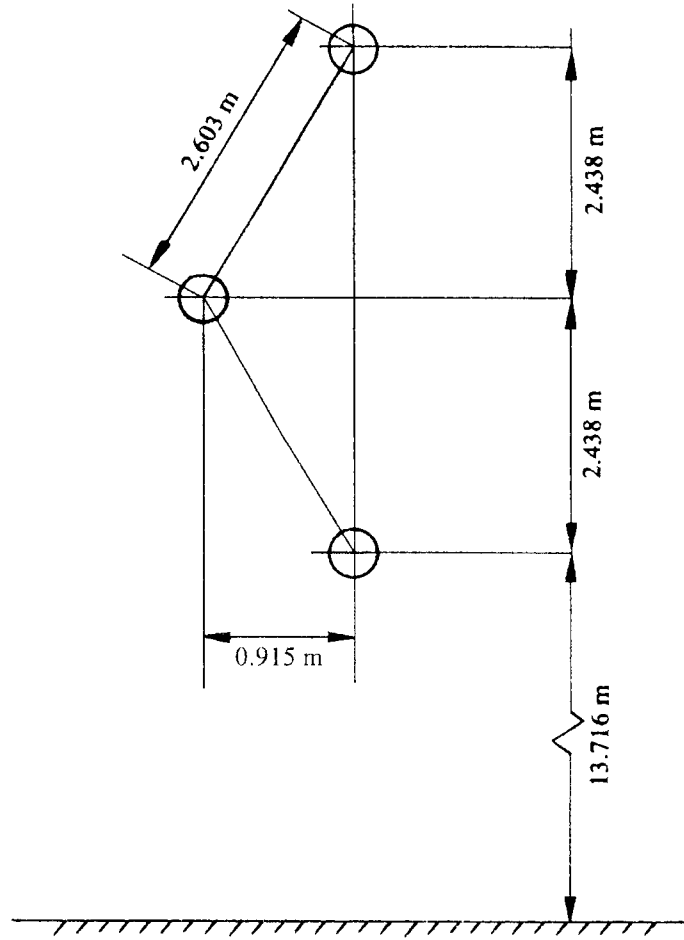


FIGURA 2.6 Dimensiones del circuito trifásico del ejemplo 2.1

Los términos de corrección son

$$\begin{aligned}
 \Delta X_{00p} &= -\Delta R_{00p} = 1.015f \frac{h_a + h_b + h_c}{\sqrt{\rho/f}} \times 10^{-6} \\
 &= 1.015 \times 50 \times \frac{13.7 + 16.2 + 18.6}{100/50} \times 10^{-6} \\
 &= 0.002 \, \Omega/\text{km}
 \end{aligned}$$

$$Z_{00p} = 0.146 + 0.00296 \times 50 - 0.002 + j \left(0.00868 \times 50 \log_{10} \frac{93,050}{44.2} + 0.002 \right)$$

$$Z_{00p} = 0.146 + 0.148 - 0.002 + j(1.442 + 0.002)$$

$$Z_{00p} = 0.292 + j1.444 \, \Omega/\text{km}$$

Puede verse que los factores de corrección ΔR_{00p} y ΔX_{00p} son prácticamente despreciables.

2.2.2 Impedancia inductiva de secuencia cero de dos circuitos trifásicos en paralelo sin cables de guarda

Si se considera únicamente la circulación de corrientes de tierra, los dos circuitos trifásicos en paralelo pueden sustituirse por dos sistemas monofásicos de un hilo con regreso común por tierra, como se indica en la figura 2.7.

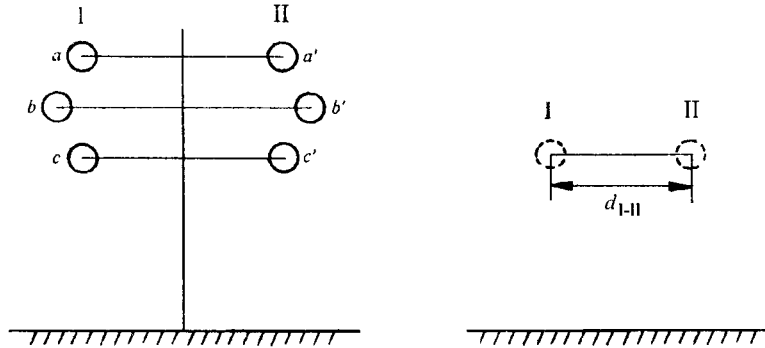


FIGURA 2.7 Reducción de dos circuitos trifásicos a dos circuitos monofásicos con regreso común por tierra

Aplicando la teoría de Carson pueden escribirse las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_n^I &= Z_{I-I} \tilde{I}_n^I + Z_{I-II} \tilde{I}_n^II \\ \tilde{V}_n^{II} &= Z_{II-II} \tilde{I}_n^{II} + Z_{II-I} \tilde{I}_n^I\end{aligned}$$

Expresando las ecuaciones anteriores con cantidades de secuencia cero

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{a0}^I &= Z_{00p} \tilde{I}_{a0}^I + Z_{00m} \tilde{I}_{a0}^{II} \\ \tilde{V}_{a0}^{II} &= Z_{00m} \tilde{I}_{a0}^I + Z_{00p} \tilde{I}_{a0}^{II}\end{aligned}$$

donde

- Z_{00p} impedancia propia de secuencia cero del circuito I
- Z_{00p}^I impedancia propia de secuencia cero del circuito II
- Z_{00m} impedancia mutua de secuencia cero entre los circuitos I y II

La impedancia mutua de secuencia cero entre los dos circuitos puede calcularse de la siguiente manera:

$$Z_{00m} = 3Z_{m-n}$$

de acuerdo con la teoría de Carson

$$Z_{m-n} = 0.00098f + \Delta R_{m-n} + j \left(0.002892f \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{d_{I-II}} + \Delta X_{m-n} \right) \Omega/\text{km} \quad (2.31)$$

donde

$$d_{I-II} = \sqrt[18]{d_{aa'}^2 \times d_{ab'}^2 \times d_{ac'}^2 \times d_{ba'}^2 \times d_{bb'}^2 \times d_{bc'}^2 \times d_{ca'}^2 + d_{cb'}^2 \times d_{cc'}^2}$$

d_{I-II} = distancia entre los conductores I y II

= distancia media geométrica entre los circuitos trifásicos I y II

$$-\Delta R_{m-n} = \Delta X_{m-n} = 1.015f \frac{h_I + h_{II}}{2\sqrt{\rho/f}} \times 10^{-6} \Omega/\text{km} \quad (2.32)$$

donde

$$h_I = \frac{h_a + h_b + h_c}{3} \quad \text{y} \quad h_{II} = \frac{h_{a'} + h_{b'} + h_{c'}}{3}$$

Teniendo en cuenta que $Z_{00m} = 3Z_{mm-n}$

$$Z_{00m} = 0.002964f + \Delta R_{00m} + j \left(0.008676f \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{d_{I-II}} + \Delta X_{00m} \right) \Omega/\text{km} \quad (2.33)$$

donde

$$-\Delta R_{00m} = \Delta X_{00m} = 1.015f \frac{3(h_I + h_{II})}{2\sqrt{\rho/f}} \times 10^{-6} \Omega/\text{km} \quad (2.34)$$

Si los dos circuitos trifásicos están conectados en paralelo en ambos extremos y circulan por ellos corrientes de secuencia cero iguales, se tendrá

$$\tilde{V}_{a0}^I = \tilde{V}_{a0}^{II} = Z_{00p} \tilde{I}_{a0} + Z_{00m} \tilde{I}_{a0} = (Z_{00p} + Z_{00m}) \tilde{I}_{a0}$$

O sea que la impedancia de secuencia cero de cada circuito, tomando en cuenta la inducción mutua entre circuitos es

$$Z_{00} = Z_{00p} + Z_{00m}$$

y la impedancia de secuencia cero de los dos circuitos en paralelo es

$$\frac{Z_{00}}{2} = \frac{Z_{00p} + Z_{00m}}{2}$$

$$\frac{Z_{00}}{2} = \frac{R}{2} + 0.002964f + \Delta R_{00} + j0.008676f \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{\sqrt{r_p \times d_{I-II}}} + \Delta X_{00} \quad \Omega/\text{km}$$

donde $\sqrt{r_p \times d_{I-II}}$ es el radio medio geométrico del conjunto de seis conductores.

EJEMPLO 2.2

Cálculo de la impedancia inductiva mutua de secuencia cero entre los dos circuitos trifásicos de la figura 2.8 y de la impedancia de secuencia cero de los dos circuitos conectados en paralelo.

SOLUCIÓN

La impedancia propia de cada circuito es la misma que la calculada en el problema 2.1.

La impedancia mutua entre los dos circuitos está dada por la siguiente expresión:

$$Z_{00m} = 0.00296f + \Delta R_{00m} + j \left(0.00868 \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{(DMG)_{I-II}} + \Delta X_{00m} \right) \quad \Omega/\text{km}$$

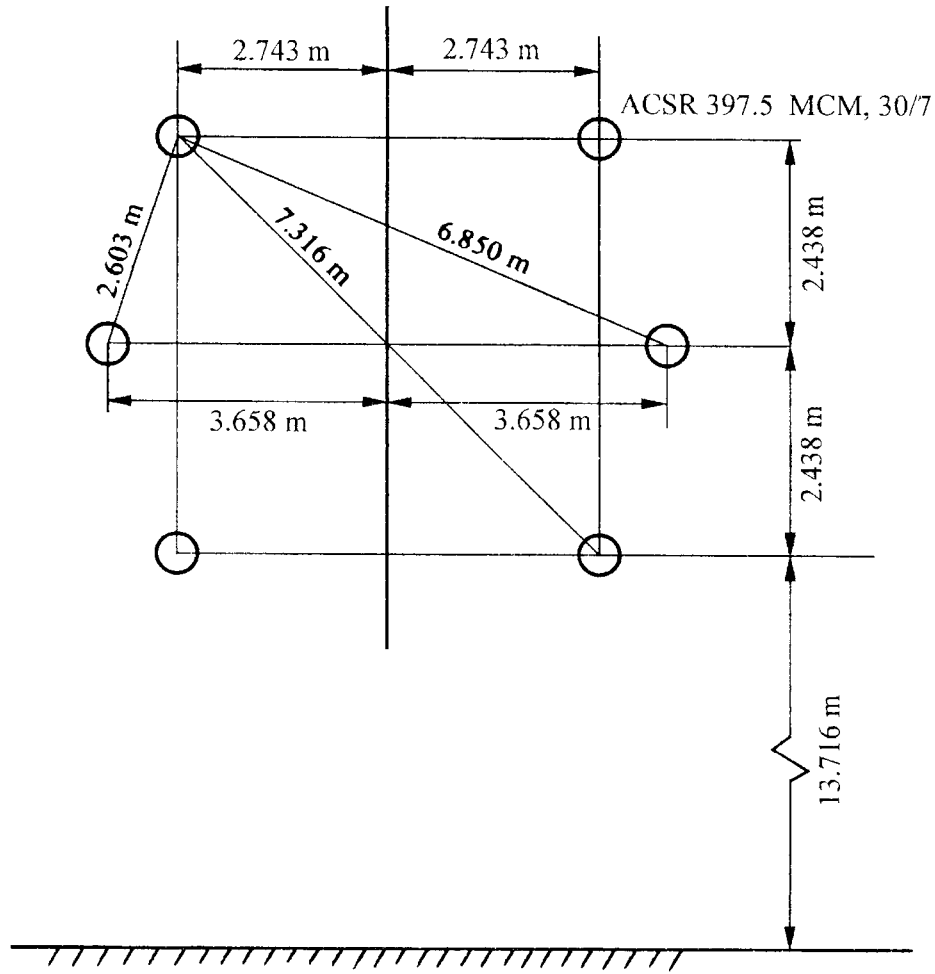


FIGURA 2.8 Dimensiones de los circuitos trifásicos del ejemplo 2.2

La distancia media geométrica entre los dos circuitos tiene el siguiente valor:

$$\begin{aligned}
 (DMG)_{I-II} &= \sqrt[9]{d_{aa'} \times d_{ab'} \times d_{ac'} \times d_{ba'} \times d_{bb'} \times d_{bc'} \times d_{ca'} \times d_{cb'} \times d_{cc'}} \\
 &= \sqrt[9]{5.486^2 \times 6.858^4 \times 7.315^3} = 6.675 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Los factores de corrección tienen los siguientes valores:

$$\Delta X_{00m} = -\Delta R_{00m} = 1.015 f \frac{3(h_I + h_{II})}{2\sqrt{\rho/f}} \times 10^{-6} \text{ } \Omega/\text{km}$$

donde

$$h_I = h_{II} = \frac{h_a + h_b + h_c}{3} = \frac{13.7 + 16.2 + 18.2}{3} = 16.2 \text{ m}$$

$$\Delta X_{00m} = -\Delta R_{00m} = 1.015 \times 50 \times \frac{48.6}{\sqrt{100/50}} \times 10^{-6} = 0.002 \text{ } \Omega/\text{km}$$

$$Z_{00m} = 0.00296 \times 50 - 0.002 + j \left(0.00868 \times 50 \log_{10} \frac{930.5}{6.675} + 0.002 \right) \text{ } \Omega/\text{km}$$

$$Z_{00m} = 0.148 - 0.002 + j(0.930 + 0.002)$$

$$Z_{00m} = 0.146 + j0.932 \text{ } \Omega/\text{km}$$

Si los dos circuitos están conectados en paralelo y circulan por los seis conductores corrientes de secuencia cero iguales, la impedancia de secuencia cero de los dos circuitos en paralelo es

$$Z_{00} = \frac{Z_{00p} + Z_{00m}}{2}$$

$$Z_{00} = \frac{(0.292 + j1.444) + (0.146 + j0.932)}{2}$$

$$Z_{00} = 0.219 + j1.188 \text{ } \Omega/\text{km}$$

Se podría haber llegado directamente a este resultado considerando el conductor equivalente a los seis conductores en paralelo.

2.2.3 Impedancia inductiva de secuencia cero de las líneas de transmisión trifásica con cables de guarda

Supóngase un conductor y un hilo de guarda paralelo como se indica en la figura 2.9. El conductor está conectado a tierra en uno de los extremos y en el otro extremo tiene aplicado un voltaje $\tilde{V}_l$. El hilo de guarda está conectado a tierra en los dos extremos.

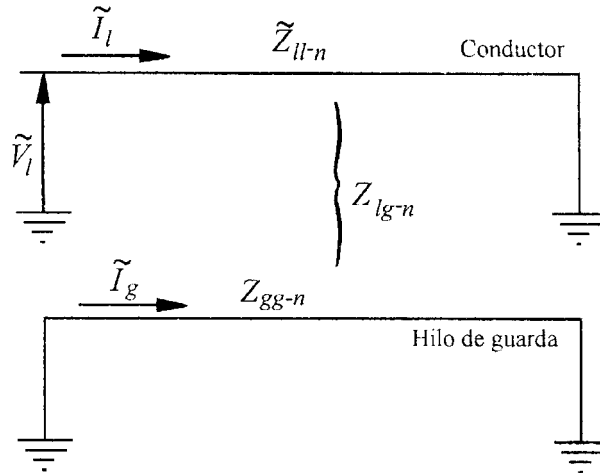


FIGURA 2.9 Representación esquemática de una línea de transmisión con hilos de guarda

Para las condiciones anteriores pueden escribirse las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{V}_l = \tilde{Z}_{ll-n} \tilde{I}_l + \tilde{Z}_{lg-n} \tilde{I}_g \quad (2.35)$$

$$\tilde{V}_g = 0 = \tilde{Z}_{lg-n} \tilde{I}_l + \tilde{Z}_{gg-n} \tilde{I}_g \quad (2.36)$$

donde

- $\tilde{V}_l$ voltaje aplicado en un extremo del conductor
- $\tilde{I}_l$ corriente que circula por el conductor y regresa por tierra
- $\tilde{V}_g$ voltaje del hilo de guarda, que es igual a cero, para la conexión de la figura 2.7
- $\tilde{I}_g$ corriente que circula por el hilo de guarda y regresa por tierra
- $\tilde{Z}_{ll-n}$ impedancia propia del conductor incluyendo el regreso por tierra
- $\tilde{Z}_{gg-n}$ impedancia propia del hilo de guarda, incluyendo el regreso por tierra
- $\tilde{Z}_{lg-n}$ impedancia mutua entre el conductor y el hilo de guarda, incluyendo el regreso común por tierra

Las impedancias anteriores están dadas por las fórmulas de Carson.

En el diagrama de la figura 2.9, el conductor puede representar un conductor equivalente a uno o más circuitos trifásicos en paralelo por las fases de los cuales circulan corrientes de secuencia cero iguales, y el hilo de guarda puede representar un conductor equivalente a uno o más hilos de guarda en paralelo, por donde circulan corrientes de secuencia cero iguales.

Convirtiendo las cantidades que aparecen en las ecuaciones 2.35 y 2.36 a cantidades de secuencia cero, pueden escribirse las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{V}_{0l} = Z_{0l} \tilde{I}_{0l} + Z_{0lg} \tilde{I}_{0g} \quad (2.37)$$

$$\tilde{V}_{0g} = 0 = Z_{0lg} \tilde{I}_{0l} + Z_{0g} \tilde{I}_{0g} \quad (2.38)$$

donde

$$\tilde{V}_{0l} = \tilde{V}_l$$

$$\tilde{I}_{0l} = \frac{1}{3} \tilde{I}_l$$

$$\tilde{V}_{0g} = \tilde{V}_g = 0$$

$$\tilde{I}_{0g} = \frac{1}{3} \tilde{I}_g$$

$$Z_{0l} = 3Z_{ll^{-n}}$$

$$Z_{0g} = 3Z_{gg^{-n}}$$

$$Z_{0lg} = 3Z_{lg^{-n}}$$

Despejando $\tilde{I}_{0g}$ en la ecuación 2.38

$$\tilde{I}_{0g} = -\frac{Z_{0lg}}{Z_{0g}} \tilde{I}_{0l}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 2.37

$$\tilde{V}_{0l} = Z_{0l} \tilde{I}_{0l} - \frac{Z_{0lg}^2}{Z_{0g}} \tilde{I}_{0l}$$

$$\frac{\tilde{V}_{0l}}{\tilde{I}_{0l}} = Z_{00} = Z_{0l} - \frac{(Z_{0lg})^2}{Z_{0g}} \quad (2.39)$$

donde Z_{00} es la impedancia equivalente de secuencia cero de un sistema formado por un circuito trifásico o varios circuitos trifásicos en paralelo y uno o varios hilos de guarda.

2.2.4 Impedancia inductiva de secuencia cero de un circuito trifásico con un cable de guarda

Sea una línea de transmisión constituida por un circuito trifásico y un hilo de guarda, como se indica en la figura 2.10a. Con respecto a la circulación de corriente de secuencia cero, este sistema puede reducirse a uno equivalente formado por un solo conductor y un cable de guarda, como se indica en la figura 2.10b.

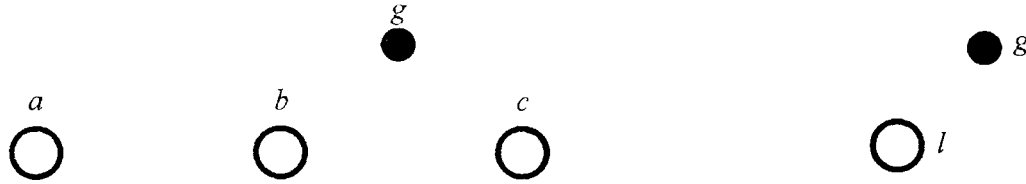


FIGURA 2.10 Un circuito trifásico con un cable de guarda

El radio medio geométrico del conductor equivalente es igual a

$$RMG_1 = \sqrt[9]{r^3 d_{ab}^2 d_{ac}^2 d_{bc}^2} = \sqrt[3]{r \sqrt[3]{(d_{ab} d_{ac} d_{bc})^2}} = \sqrt[3]{r (DMG_{abc})^2}$$

donde r es el radio medio geométrico de cada conductor.

La resistencia del conductor equivalente es igual a la tercera parte de la resistencia de una fase.

$$R_l = \frac{R}{3}$$

La resistencia de secuencia cero correspondiente es

$$R_{0l} = 3R_l = R$$

La impedancia equivalente de secuencia cero del sistema de la figura 2.10 está dada por

$$Z_{00} = Z_{00l} - \frac{Z_{00lg}^2}{Z_{00g}}$$

Los valores de Z_{0l} , Z_{0g} y Z_{0lg} se derivan de las fórmulas de Carson. Despreciando los factores de corrección

$$Z_{0l} = R + 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{D_e}{RMG_1} \quad (2.40)$$

$$Z_{0g} = 3R_g + 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{D_e}{r_g} \quad (2.41)$$

$$Z_{0lg} = 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{D_e}{RMG_{lg}} \quad (2.42)$$

donde

$$D_e = 658\sqrt{\rho/f} \text{ m}$$

$$r_g = \text{radio medio geométrico del hilo de guarda}$$

$$DMG_{lg} = \text{distancia media geométrica entre los conductores y el hilo de guarda}$$

$$DMG_{lg} = \sqrt[3]{D_{ag} \times D_{be} \times D_{cg}}$$

EJEMPLO 2.3

Cálculo de la impedancia inductiva de secuencia cero del circuito trifásico con un cable de guarda de la figura 2.11a.

Los conductores y los cables de guarda son de aluminio con alma de acero de 397.5 MCM, 30/7, con radio medio geométrico de 0.85 cm y una resistencia efectiva a 60 c.p.s. de 0.146 Ω /km a 25°C y 0.161 Ω /km a 50°C.

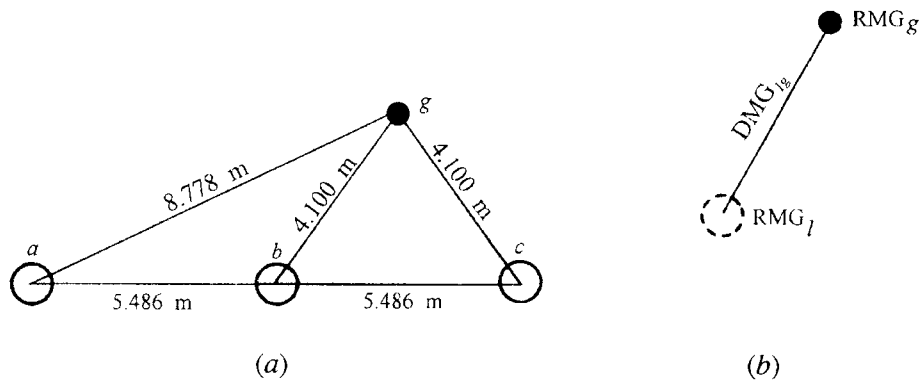


FIGURA 2.11 Dimensiones de la línea del ejemplo 2.3

La frecuencia del sistema es de 60 c.p.s. y la resistividad del terreno de $100 \Omega/\text{m}/\text{m}^2$

SOLUCIÓN

Se reduce el sistema formado por los tres conductores y el cable de guarda a un sistema ficticio formado por un conductor equivalente a los tres conductores en paralelo y el cable de guarda como se indica en la figura 2.11b.

$$D_e = 658 \sqrt{100/60} = 850 \text{ m}$$

$$RMG_g = 0.86 \text{ cm}$$

$$RMG_l = \sqrt[9]{0.85^3 \times 5.486^6} = 0.741 \text{ m}$$

$$DMG_{lg} = \sqrt[3]{8.778 \times 4.1 \times 4.1} = 5.273$$

$$\begin{aligned} Z_{00l} &= 0.161 + 0.002964 \times 60 + j0.008676 \times 60 \log_{10} \frac{850}{0.741} \\ &= 0.3390 + j1.5930 \Omega/\text{km} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{00g} &= 3 \times 0.146 + 0.002964 \times 60 + j0.008676 \times 60 \log_{10} \frac{850}{0.0086} \\ &= 0.6158 + j2.6004 = 2.672 \angle 76^\circ 40' \Omega/\text{km} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{00lg} &= 0.002964 \times 60 + j0.008676 \times 60 \log_{10} \frac{850}{5.273} \\ &= 0.1778 + j1.1489 = 1.162 \angle 81^\circ 10' \Omega/\text{km} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{00} &= Z_{00l} - \frac{(Z_{00lg})^2}{Z_{00g}} \\ &= 0.339 + j1.593 - \frac{(1.162 \angle 81^\circ 10')^2}{2.672 \angle 76^\circ 49'} \\ Z_{00} &= 0.301 + j1.088 \Omega/\text{km} \end{aligned}$$

2.2.5 Impedancia inductiva de secuencia cero de un circuito trifásico con dos cables de guarda

Sea una línea de transmisión constituida por un circuito trifásico y dos cables de guarda, como se indica en la figura 2.12a.

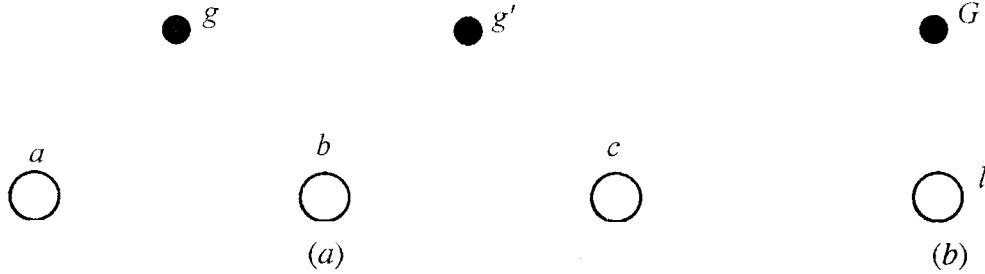


FIGURA 2.12 Un circuito trifásico con dos cables de guarda

El radio medio geométrico del conductor equivalente a los tres conductores en paralelo es

$$RMG_l = \sqrt[3]{r(DMG_{abc})^2}$$

donde:

r radio medio geométrico de cada conductor
 DMG_{abc} distancia media geométrica entre los tres conductores

$$DMG_{abc} = \sqrt[3]{d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc}}$$

El radio medio geométrico del cable equivalente a los dos cables de guarda en paralelo es

$$RMG_g = \sqrt{r_g d_{gg'}}$$

donde

r_g radio medio geométrico de cada cable de guarda

$d_{gg'}$ distancia entre los cables de guarda

La impedancia propia de secuencia cero del grupo de tres conductores en paralelo es

$$Z_{00l} = R_c + 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{D_e}{RMG_l} \quad (2.43)$$

La impedancia propia de secuencia cero de los dos cables de guarda en paralelo es

$$Z_{00g} = \frac{3R_g}{2} + 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{D_e}{RMG_g} \quad (2.44)$$

La impedancia mutua de secuencia cero entre los conductores y los cables de guarda es

$$Z_{00lg} = 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{D_e}{RMG_{lg}} \quad (2.45)$$

donde DMG_{lg} es la distancia media geométrica entre los conductores y los cables de guarda.

$$DMG_{lg} = \sqrt[6]{d_{ag} \times d_{ag'} \times d_{bg} \times d_{bg'} \times d_{cg} \times d_{cg'}}$$

La impedancia de secuencia cero de la línea de la figura 2.11 es

$$Z_{00} = Z_{00l} - \frac{Z_{00lg}^2}{Z_{00g}}$$

EJEMPLO 2.4

Cálculo de la impedancia inductiva de secuencia cero del circuito trifásico con dos cables de guarda de la figura 2.13.

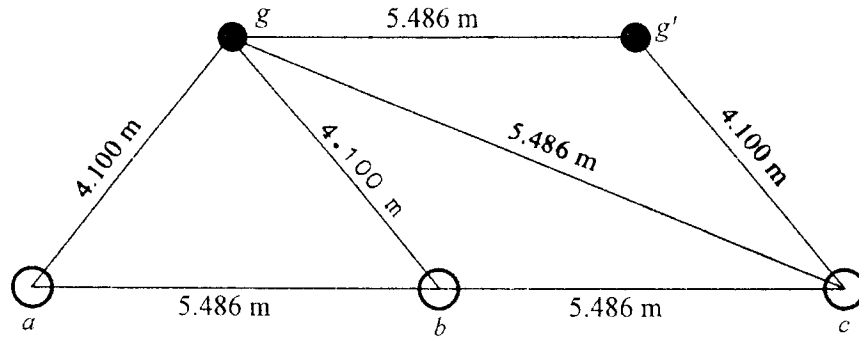


FIGURA 2.13 Dimensiones de la línea del ejemplo 2.4

Los conductores y los cables de guarda son de aluminio con alma de acero de 397.5 MCM, 30/7, con radio medio geométrico de 0.85 cm y una resistencia efectiva a 60 c.p.s. de 0.146 Ω /km a 25°C y 0.161 Ω /km a 50°C.

La frecuencia del sistema es de 60 c.p.s. y la resistividad del terreno de 100 Ω /m/m².

SOLUCIÓN

$$D_e = 658 \sqrt{100/60} = 850 \text{ m}$$

$$DMG_{abc} = 5.486 \sqrt[3]{2} = 6.912 \text{ m}$$

Radio medio geométrico del conductor equivalente a los tres conductores

$$RMG_l = \sqrt[3]{r(DMG_{abc})^2} = \sqrt[3]{0.846 \times 691.2^2} = 74.07 \text{ cm}$$

Radio medio geométrico del conductor equivalente a los dos hilos de guarda

$$RMG_g = \sqrt{r_g d_{gg'}} = \sqrt{0.846 \times 548.6} = 21.54 \text{ cm}$$

Distancia media geométrica entre los tres conductores y los dos hilos de guarda

$$DMG_{lg} = \sqrt[6]{d_{ag} \times d_{ag'} \times d_{bg} \times d_{bg'} \times d_{cg} \times d_{cg'}} = \sqrt[3]{8.778 \times 4.100^2} = 5.285 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} Z_{00l} &= R + 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{D_e}{RMG_l} \quad \Omega/\text{km} \\ &= 0.1610 + 0.002964 \times 60 + j0.008676 \times 60 \log_{10} \frac{850}{0.7407} \end{aligned}$$

$$Z_{00l} = 0.3388 + j1.593 \quad \Omega/\text{km}$$

$$\begin{aligned} Z_{00g} &= \frac{3}{2} R_g + 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{D_e}{RMG_g} \quad \Omega/\text{km} \\ &= \frac{3 \times 0.140}{2} + 0.002964 \times 60 + j0.008676 \times 60 \times \log_{10} \frac{850}{0.2154} \end{aligned}$$

$$Z_{00g} = 0.3968 + j1.872 \quad \Omega/\text{km}$$

$$\begin{aligned} Z_{00lg} &= 0.00296f + j0.008676f \log_{10} \frac{D_e}{DMG_{10}} \quad \Omega/\text{km} \\ &= 0.00296 \times 60 + j0.008676 \times 60 \log_{10} \frac{850}{5.285} \end{aligned}$$

$$Z_{00lg} = 0.1778 + j1.148 \quad \Omega/\text{km}$$

$$\begin{aligned} Z_{00} &= Z_{00l} - \frac{(Z_{00lg})^2}{Z_{00g}} \\ &= 0.3388 + j1.593 - \frac{(0.1778 + j1.148)^2}{0.3968 + j1.872} \end{aligned}$$

$$Z_{00} = 0.2692 + j0.8915 \quad \Omega/\text{km}$$

2.2.6 Impedancia inductiva de secuencia cero de una línea de transmisión formada por dos circuitos trifásicos con dos cables de guarda

Sea una línea de transmisión constituida por dos circuitos trifásicos con dos cables de guarda, como se indica en la figura 2.14a.

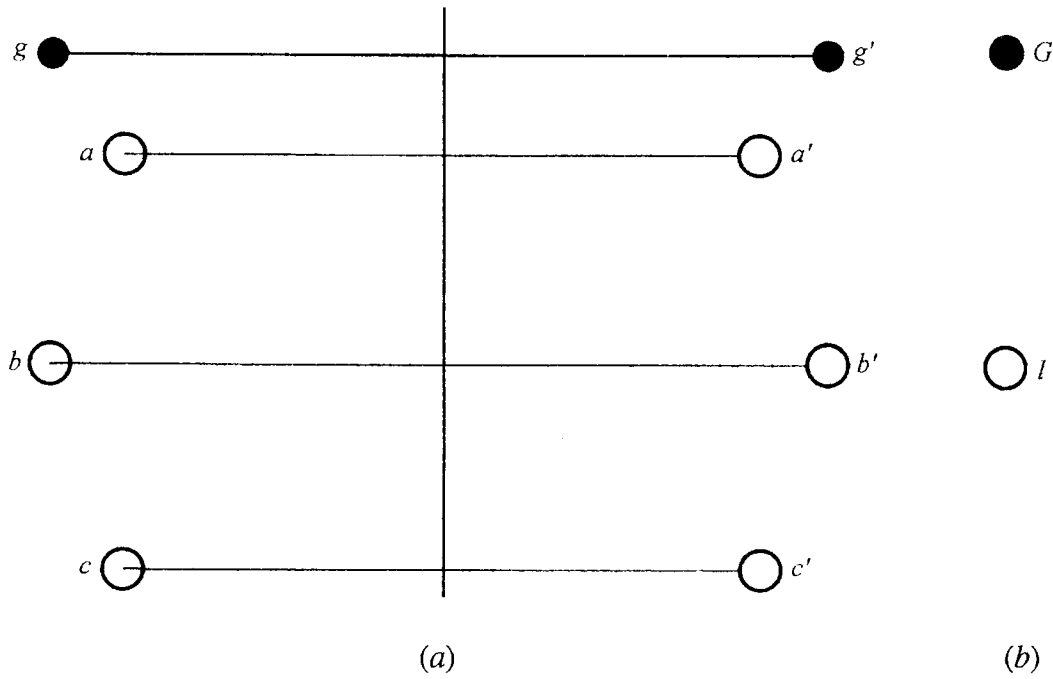


FIGURA 2.14 Dos circuitos trifásico con dos cables de guarda

Se sustituyen los dos cables de guarda por un cable ficticio cuyo radio medio geométrico es

$$RMG_g = \sqrt{r_g d_{gg'}}$$

Se sustituyen los seis conductores por un conductor ficticio cuyo radio medio geométrico es

$$RMG_1 = \sqrt[36]{r^6 \times d_{ab}^2 \times d_{ac}^2 \times d_{aa'}^2 \times d_{ab'}^2 \times d_{ac'}^2 \times d_{bc'}^2 \times d_{ba'}^2 \times d_{bb'}^2 \times d_{bc'}^2 \times d_{ca'}^2 \times d_{cb'}^2 \times d_{cc'}^2 \times d_{a'b'}^2 \times d_{a'c'}^2 \times d_{b'c'}^2}$$

El radio medio geométrico del conductor equivalente a los seis conductores puede calcularse también en la siguiente forma:

$$RMG_1 = \sqrt{RMG_c \times DMG_{c-c}}$$

donde

RMG_c radio medio geométrico de un circuito

DMG_{c-c} distancia media geométrica entre los dos circuitos

La distancia media geométrica entre los conductores y los cables de guarda es

$$DMG_{lg} = \sqrt[12]{d_{ag} \times d_{ag'} \times d_{bg} \times d_{cg} \times d_{cg'} \times d_{a'g} \times d_{a'g'} \times d_{b'g} \times d_{b'g'} \times d_{c'g} \times d_{c'g'}}$$

La impedancia propia de secuencia cero de los seis conductores en paralelo es

$$Z_{00l} = \frac{R_c}{2} + 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{D_e}{RMG_L} \quad \Omega/\text{km} \quad (2.46)$$

donde R_c resistencia en ohms por kilómetro de un conductor.

La impedancia propia de secuencia cero de los dos cables de guarda es

$$Z_{00g} = \frac{3R_g}{2} + 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{D_e}{RMG_g} \quad \Omega/\text{km} \quad (2.47)$$

donde R_g es la resistencia en ohms por kilómetro de un cable de guarda.

La impedancia mutua de secuencia cero entre los conductores y los cables de guarda es

$$Z_{00lg} = 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{D_e}{DMG_{lg}} \quad \Omega/\text{km} \quad (2.48)$$

La impedancia de secuencia cero de la línea con dos circuitos trifásicos y dos cables de guarda, se obtiene sustituyendo los valores anteriores de Z_{00l} , Z_{00g} y Z_{00lg} en la expresión

$$Z_{00} = Z_{00l} - \frac{(Z_{00lg})^2}{Z_{00g}}$$

2.2.7 Cables de guarda de acero

En la mayoría de los casos los cables de guarda de las líneas de transmisión son de acero galvanizado, de 3/8" o 5/16" de diámetro exterior y formados por siete hilos trenzados.

A continuación se dan los valores aproximados de los radios medios geométricos para esos dos calibres de cable de acero y para una frecuencia de 60 ciclos por segundo.

	RMG
Cable de acero de $3/8"$ ϕ , 7 hilos	30.5×10^{-8} cm
Cable de acero de $5/16"$ ϕ , 7 hilos	30.5×10^{-9} cm

EJEMPLO 2.5

Cálculo de la impedancia inductiva de secuencia cero de la línea de la figura 2.15, formada por dos circuitos trifásicos en paralelo con dos cables de guarda.

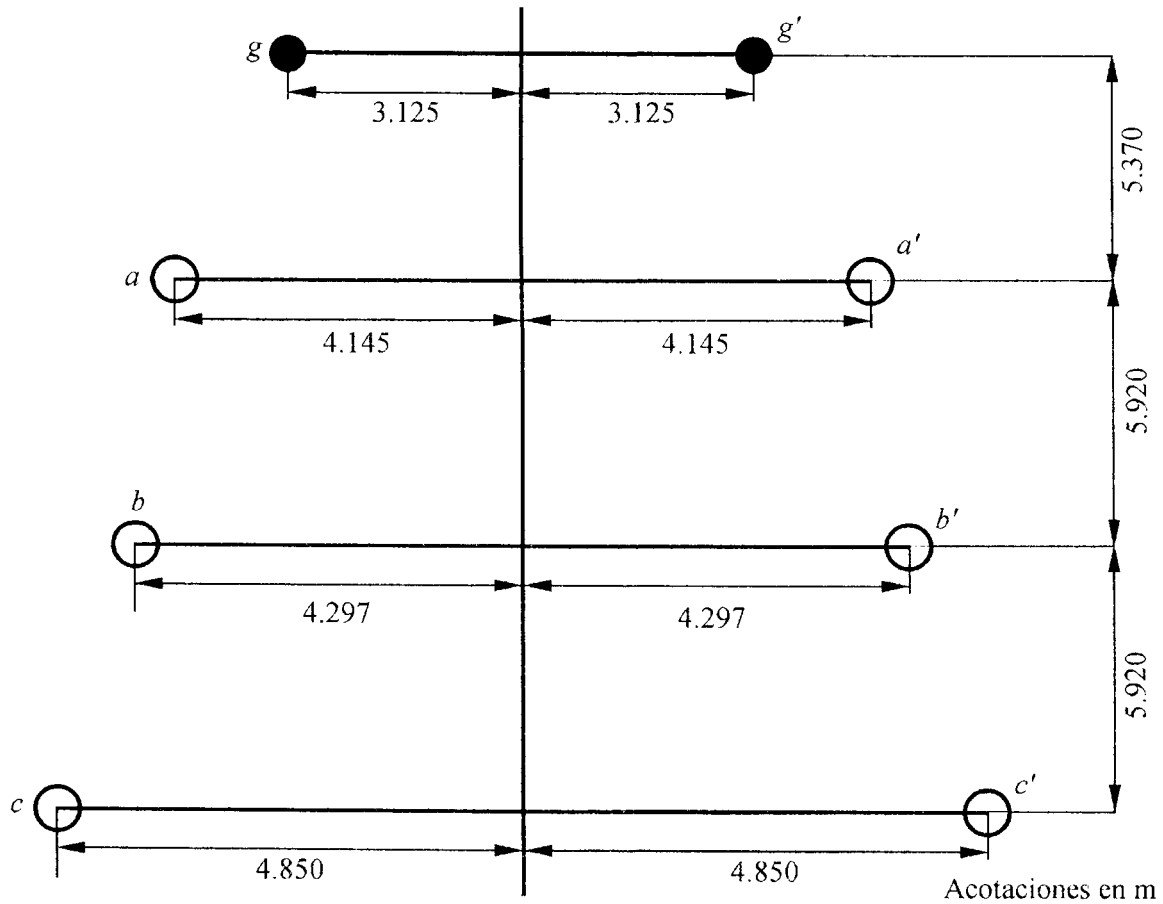


FIGURA 2.15 Dimensiones de la línea del ejemplo 2.5

Los conductores son cables de aluminio con alma de acero de 1 113 MCM, 45/7, con un diámetro exterior de 32 mm, un radio medio geométrico de 13 mm y una resistencia efectiva de 0.059 Ω/km a 50°C y 50 c.p.s.

Los cables de guarda son cables de acero de 9.5 mm de diámetro exterior, 7 hilos, con un radio medio geométrico de 30.5×10^{-8} cm y una resistencia efectiva 4.351 Ω/km a 25°C y 50 c.p.s.

La frecuencia del sistema es 50 c.p.s. y la resistividad del terreno 100 $\Omega/\text{m}/\text{m}^2$.

SOLUCIÓN

A partir de las dimensiones de la figura 2.15 pueden calcularse las siguientes distancias:

$$d_{ab} = d_{a'b'} = 5.940 \text{ m}$$

$$d_{ac} = d_{a'c'} = 11.861 \text{ m}$$

$$d_{bc} = d_{b'c'} = 5.946 \text{ m}$$

$$d_{aa'} = 8.290 \text{ m}$$

$$d_{bb'} = 8.594 \text{ m}$$

$$d_{cc'} = 9.700 \text{ m}$$

$$d_{ab'} = d_{ba'} = 10.311 \text{ m}$$

$$d_{ac'} = d_{ca'} = 14.869 \text{ m}$$

$$d_{bc'} = d_{c'b} = 10.896 \text{ m}$$

$$d_{ag} = d_{a'g'} = 5.466 \text{ m}$$

$$d_{bg} = d_{b'g'} = 11.351 \text{ m}$$

$$d_{cg} = d_{c'g'} = 17.296 \text{ m}$$

$$d_{ag'} = d_{a'g} = 9.038 \text{ m}$$

$$d_{bg'} = d_{b'g} = 13.511 \text{ m}$$

$$d_{cg'} = d_{c'g} = 18.968 \text{ m}$$

$$d_{gg'} = 6.250 \text{ m}$$

Radio medio geométrico de un cable de guarda = 30.5×10^{-8} cm

Radio medio geométrico del conductor equivalente a los dos cables de guarda

$$RMG_g = \sqrt{30.5 \times 10^{-8} \times 625} = 138 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

Radio medio geométrico del conductor equivalente a los seis conductores de la línea

$$RMG_1 = \sqrt{RMG_c \times DMG_{cc}}$$

$$RMG_c = \sqrt{r \times DMG_c^2}$$

$$DMG_c = \sqrt[3]{d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc}} = \sqrt[3]{5.940 \times 11.861 \times 5.946} = 7.482 \text{ m}$$

$$RMG = \sqrt{1.3 \times 748.2^2} = 90 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} DMG_{cc} &= \sqrt[9]{d_{aa'} \times d_{ab'} \times d_{ac'} \times d_{ba'} \times d_{bb'} \times d_{bc'} \times d_{ca'} \times d_{cb'} \times d_{cc'}} \\ &= \sqrt[9]{8.29 \times 10.311^2 \times 14.869^2 \times 8.594 \times 10.896^2 \times 9.700} = 10.5 \text{ m} \end{aligned}$$

$$RMG_1 = \sqrt{0.9 \times 10.5} = 3.072 \text{ m}$$

Distancia media geométrica entre los seis conductores y los dos cables de guarda

$$\begin{aligned} DMG_{1g} &= \sqrt[12]{d_{ag}^2 \times d_{ag'}^2 \times d_{bg}^2 \times d_{bg'}^2 \times d_{cg}^2 \times d_{cg'}^2} \\ &= \sqrt[6]{5.466 \times 9.038 \times 11.351 \times 13.511 \times 17.296 \times 18.968} = 11.6 \text{ m} \end{aligned}$$

Profundidad equivalente del regreso por tierra

$$D_c = 658 \sqrt{100/50} = 930.5 \text{ m}$$

Impedancia propia de secuencia cero de los seis conductores en paralelo

$$\begin{aligned} Z_{00l} &= \frac{0.059}{2} + 0.002964 \times 50 + j0.008674 \times 50 \log_{10} \frac{930.5}{3.072} \\ Z_{00l} &= 0.178 + j1.079 \quad \Omega/\text{km} \end{aligned}$$

Impedancia propia de secuencia cero de los dos cables de guarda en paralelo

$$\begin{aligned} Z_{00g} &= \frac{3 \times 4.351}{2} + 0.002964 \times 50 + j0.008674 \times 50 \log_{10} \frac{930.5}{1.38 \times 10^{-4}} \\ Z_{00g} &= 6.675 + j2.989 \end{aligned}$$

Impedancia mutua de secuencia cero entre los conductores y los cables de guarda

$$Z_{00lg} = 0.002964 \times 50 + j 0.008674 \times 50 \log_{10} \frac{930.5}{11.6}$$

$$Z_{00lg} = 0.148 + j 0.834 \Omega/\text{km}$$

Impedancia de secuencia cero de la línea

$$Z_{00} = Z_{00l} - \frac{(Z_{00lg})^2}{Z_{00g}}$$

$$Z_{00} = 0.178 + j 1.079 - \frac{(0.148 + j 0.834)^2}{6.675 + j 2.989} = 0.178 + j 1.079 - \frac{(0.847 \angle 80^\circ)^2}{7.314 \angle 24.1^\circ}$$

$$Z_{00} = 0.108 + j 1.147 \Omega/\text{km para los dos circuitos en paralelo}$$

2.3 Cálculo de las impedancias inductivas de secuencia cero mediante las tablas de características de líneas aéreas

2.3.1 Impedancia inductiva propia de secuencia cero de un circuito trifásico sin cables de guarda

La ecuación 2.29 puede escribirse, despreciando los términos de corrección, expresando la impedancia de secuencia cero en ohms por milla y expresando la profundidad equivalente de regreso de la corriente de tierra en pies, en la siguiente forma:

$$Z_{00p} = r_a + 0.00473f + j 0.01397f \log_{10} \frac{2160 \sqrt{\rho/f}}{\sqrt[3]{r(DMG_{abc})^2}} \Omega/\text{mi}$$

$$Z_{00p} = r_a + 0.00473f + j 0.01397f \left[\frac{1}{2} \log_{10} 2160^2 \frac{\rho}{f} + \frac{1}{3} \log_{10} \frac{1}{r} - \frac{2}{3} \log_{10} (DMG_{abc}) \right]$$

El término r_a , que es igual a la resistencia efectiva de un conductor en ohms por milla, puede leerse en las tablas de características de los conductores.

El término

$$r_e = 0.00473f \, \Omega/\text{mi}$$

que es función únicamente de la frecuencia, está tabulado para 25, 50 y 60 ciclos por segundo.

El término

$$\begin{aligned} x_e &= 0.01397 \times \frac{1}{2} f \log_{10} 2 \cdot 160^2 \rho / f \\ &= 0.00698 f \log_{10} (4.6656 \times 10^6 \rho / f) \, \Omega/\text{mi} \end{aligned}$$

que es función de la resistividad del terreno y de la frecuencia, está tabulado para 25, 50 y 60 ciclos por segundo y para valores de resistividad comprendidos entre 1 Ω/m^2 y 10,000 $\Omega/\text{m}/\text{m}^2$.

$$\begin{aligned} x_a &= 0.1397 f \times \frac{1}{3} \log_{10} \frac{1}{r} \\ &= 0.00466 f \log_{10} \frac{1}{r} \, \Omega/\text{mi} \end{aligned}$$

que es función del radio medio geométrico del conductor y de la frecuencia, puede leerse en las tablas de características de los conductores.

El término

$$\begin{aligned} x_d &= 0.01397 f \times 1/3 \log_{10} (DMG_{abc}) \\ &= 0.00466 f \log_{10} (DMG_{abc}) \, \Omega/\text{mi} \end{aligned}$$

que es función de la distancia media geométrica entre los tres conductores, está tabulado para distancias comprendidas entre 0' - 1'' y 49' y para 25, 50 y 60 ciclos por segundo.

Puesto que

$$\begin{aligned} x_d &= 0.00466 f \log_{10} \sqrt[3]{d_{ab} \times d_{ac} \times d_{cb}} \\ &= 0.00466 f \times 1/3 (\log_{10} d_{ab} + \log_{10} d_{ac} + \log_{10} d_{cb}) \end{aligned}$$

puede calcularse también, haciendo uso de las tablas, en la siguiente forma:

$$x_d = 1/3 (x_{d(ab)} + x_{d(ac)} + x_{d(bc)})$$

En resumen, la impedancia inductiva propia de secuencia cero de un circuito trifásico sin cables de guarda está dada por la siguiente expresión:

$$Z_{00p} = r_a + r_e + j(x_c + x_a - 2x_d) \Omega/\text{mi} \quad (2.49)$$

$$x_d = 1/3 j(x_{d(ab)} + x_{d(ac)} + x_{d(bc)}) \Omega/\text{mi} \quad (2.50)$$

2.3.2 Impedancia inductiva mutua de secuencia cero entre los circuitos trifásicos sin cables de guarda

En forma análoga al procedimiento del punto anterior, puede demostrarse que la impedancia mutua de secuencia cero entre dos circuitos trifásicos con regreso común por tierra está dada por

$$Z_{00m} = r_c + j(x_e - 3x_d) \Omega/\text{mi} \quad (2.51)$$

donde

$$\begin{aligned} x_d = 1/9 (x_{d(aa')} + x_{d(ab')} + x_{d(ac')} + x_{d(ba')} + x_{d(bb')} + \\ + x_{d(bc')} + x_{d(ca')} + x_{d(cb')} + x_{d(cc')}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Si los dos circuitos trifásicos son idénticos y están conectados en paralelo, la impedancia de secuencia cero de cada circuito está dada por

$$Z_{00} = Z_{00p} + Z_{00m}$$

2.3.3 Impedancia inductiva de secuencia cero de líneas de transmisión con cables de guarda

Se vio que en este caso la impedancia de secuencia cero está dada por la siguiente expresión:

$$Z_{00} = Z_{00l} - \frac{(Z_{00lg})^2}{Z_{00g}}$$

La impedancia propia de secuencia cero de un cable de guarda está dada por la siguiente expresión:

$$Z_{00g} = 3r_a + r_e + j(x_e + 3x_a) \text{ } \Omega/\text{mi}$$

La impedancia propia de secuencia cero de dos cables de guarda es

$$Z_{00g} = \frac{3}{2}r_a + r_e + j\left(x_e + \frac{3}{2}x_a - \frac{3}{2}x_d\right) \text{ } \Omega/\text{mi} \quad (2.54)$$

La impedancia mutua de secuencia cero entre un cable de guarda y un circuito trifásico es

$$Z_{00lg} = r_e + j(x_e - 3x_d) \text{ } \Omega/\text{mi} \quad (2.55)$$

donde

$$x_d = \frac{1}{3}(x_{d(ag)} + x_{d(bg)} + x_{d(cg)}) \text{ } \Omega/\text{mi} \quad (2.56)$$

La impedancia de secuencia cero mutua entre dos cables de guarda y un circuito trifásico es

$$Z_{00lg} = r_e + j(x_e - 3x_d) \text{ } \Omega/\text{mi} \quad (2.57)$$

donde

$$x_d = \frac{1}{6}(x_{d(ag)} + x_{d(bg)} + x_{d(cg)} + x_{d(ag')} + x_{d(bg')} + x_{d(cg')}) \quad (2.58)$$

EJEMPLO 2.6

En la línea del ejemplo 2.1 se va a calcular la impedancia propia de secuencia cero utilizando las tablas.

SOLUCIÓN

$$Z_{00} = r_a + r_e + j(x_e + x_a - 2x_d) \Omega/\text{mi}$$

De las tablas:

$$r_a = 0.235 \Omega/\text{mi a } 25^\circ\text{C y } 50 \text{ c.p.s.}$$

$$r_e = 0.238 \Omega/\text{mi}$$

$$x_e = 2.432 \Omega/\text{mi}$$

$$x_a = 0.362 \Omega/\text{mi a } 50 \text{ c.p.s.}$$

$$DMG_{abc} = 3.200 \text{ m} = 10.5 \text{ pies}$$

$$x_d = 0.238 \Omega/\text{mi a } 50 \text{ c.p.s.}$$

$$Z_{00} = 0.235 + 0.238 + j(2.434 + 0.362 - 2 \times 0.238)$$

$$Z_{00} = 0.473 + j2.320 \Omega/\text{mi}$$

$$z_{00} = 0.294 + j1.442 \Omega/\text{km}$$

EJEMPLO 2.7

Calcular la impedancia de secuencia cero de la línea del ejemplo 2.4 haciendo uso de las tablas.

SOLUCIÓN

a) Impedancia propia de secuencia cero del circuito trifásico

$$Z_{00l} = r_a + r_e + j(x_e + x_a - 2x_d) \Omega/\text{mi}$$

$$x_d = 1/3(x_{d(ab)} + x_{d(ac)} + x_{d(bc)})$$

$$r_a = 0.259 \Omega/\text{mi a } 60 \text{ c.p.s. y } 50^\circ\text{C}$$

$$r_e = 0.2860 \Omega/\text{mi a } 60 \text{ c.p.s.}$$

$$x_e = 2.888 \Omega/\text{mi para } \rho = 100 \Omega/\text{m/m}^2 \text{ y } f = 60 \text{ c.p.s.}$$

$$x_a = 0.435 \Omega/\text{mi a } 60 \text{ c.p.s.}$$

$$x_d = 0.3787 \Omega/\text{mi a } 60 \text{ c.p.s.}$$

$$Z_{00l} = 0.259 + 0.286 + j(2.888 + 0.435 - 2 \times 0.3787)$$

$$Z_{00l} = 0.545 + j2.566 \text{ } \Omega/\text{mi}$$

b) Impedancia propia de secuencia cero de dos cables de guarda

$$Z_{00g} = 3/2 r_a + r_e + j(x_e + 3/2 x_a - 3/2 x_d) \text{ } \Omega/\text{mi}$$

$$r_a = 0.235 \text{ } \Omega/\text{mi a } 60 \text{ c.p.s. y } 25^\circ \text{C}$$

$$r_e = 0.2860 \text{ } \Omega/\text{mi a } 60 \text{ c.p.s}$$

$$x_e = 2.888 \text{ } \Omega/\text{mi para } \rho = 100 \text{ } \Omega/\text{m}/\text{m}^2 \text{ y } f = 60 \text{ c.p.s.}$$

$$x_a = 0.435 \text{ } \Omega/\text{mi a } 60 \text{ c.p.s.}$$

$$x_d = 0.3507 \text{ } \Omega/\text{mi para una separación entre los cables de guarda de 18 pies y } 60 \text{ c.p.s.}$$

$$Z_{00g} = 3/2 \times 0.235 + 0.2860 + j(2.888 + 3/2 \times 0.435 - 3/2 \times 0.3507)$$

$$Z_{00g} = 0.6385 + j3.0144 \text{ } \Omega/\text{mi}$$

c) Impedancia mutua de secuencia cero entre el circuito trifásico y los dos hilos de guarda:

$$Z_{00lg} = r_e + j(x_e - 3x_d)$$

$$x_d = 1/6 (x_{d(ag)} + x_{d(ag')} + x_{d(bg)} + x_{d(bg')} + x_{d(cg)} + x_{d(cg')})$$

$$r_c = 0.235 \text{ } \Omega/\text{mi a } 60 \text{ c.p.s.}$$

$$x_e = 2.888 \text{ } \Omega/\text{mi para } \rho = 100 \text{ } \Omega/\text{m}/\text{m}/\text{m}^2 \text{ y } f = 60 \text{ c.p.s.}$$

$$x_d = 0.3461 \text{ } \Omega/\text{mi para } f = 60 \text{ c.p.s.}$$

$$Z_{00lg} = 0.235 + j(2.888 - 3 \times 0.3461)$$

$$Z_{00lg} = 0.2860 + j1.8298 \text{ } \Omega/\text{mi}$$

$$Z_{00} = 0.545 + j2.566 - \frac{(0.2860 + j1.8298)^2}{0.6385 + j3.0144}$$

$$Z_{00} = 0.433 + j1.434 \text{ } \Omega/\text{mi}$$

$$z_{00} = 0.269 + j0.291 \text{ } \Omega/\text{km}$$

2.4 Impedancia inductiva de secuencia cero de los cables subterráneos

En el cálculo de la impedancia de secuencia cero de cables subterráneos pueden presentarse tres casos:

1. Regreso de toda la corriente de secuencia cero por tierra. Este caso se presenta cuando los cables no tienen forros metálicos o bien cuando, existiendo forros metálicos, se emplea alguno de los sistemas para evitar la circulación de corrientes por los forros.

Este caso es similar al de una línea de transmisión aérea sin cables de guarda. La impedancia de secuencia cero es igual a la impedancia propia de secuencia cero de los tres conductores:

$$Z_{00} = Z_{00c} \quad (2.59)$$

2. Regreso de la corriente de secuencia cero por el forro metálico del cable o cables y por tierra, en paralelo. Este caso es similar al de una línea de transmisión aérea con cables de guarda.

La impedancia de secuencia cero está dada por

$$Z_{00} = Z_{00c} - \frac{Z_{00M}^2}{Z_{00F}}$$

donde

- Z_{00c} impedancia propia de secuencia cero del grupo de tres conductores.
- Z_{00F} impedancia propia de secuencia cero del forro metálico, si se trata de un cable trifásico, o del grupo de tres forros metálicos, si se trata de tres cables monofásico
- Z_{00M} impedancia mutua de secuencia cero entre los tres conductores y el forro metálico si se trata de un cable trifásico, o entre los tres conductores y los tres forros metálicos, si se trata de tres cables monofásicos.

3. Regreso de toda la corriente de secuencia cero por el forro del cable, si se trata de un cable trifásico, o por los tres forros metálicos, si se trata de tres cables monofásicos. Este caso puede presentarse cuando los forros metálicos están aislados de tierra.

En este caso el o los forros metálicos sirven de conductor de regreso a las corrientes de secuencia cero que circulan por los tres conductores.

La impedancia de secuencia cero está dada, por tanto, por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} Z_{00} &= (Z_{00c} - Z_{00M}) + (Z_{00F} - Z_{00M}) \\ Z_{00} &= Z_{00c} + Z_{00F} - 2Z_{00M} \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde Z_{00c} , Z_{00F} y Z_{00M} tienen el mismo significado que en el punto 2.

Los valores de Z_{00c} , Z_{00F} y Z_{00M} se calculan en forma análoga a como se hizo para las líneas de transmisión aérea y sus expresiones se muestran a continuación.

2.4.1 Cables trifásicos

La impedancia propia de secuencia cero del grupo de tres conductores está dada por

$$Z_{00c} = r_e + 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{\sqrt[3]{r_g(DMG)^2}} \quad \Omega/\text{km} \quad (2.62)$$

donde

r_c resistencia efectiva de un conductor, Ω/km

f frecuencia, ciclos por segundo

ρ resistividad del terreno, $\Omega/\text{m}/\text{m}^2$

r_g radio medio geométrico de cada conductor

$DMG = \sqrt[3]{d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc}}$ = distancia media geométrica entre los tres conductores

$\sqrt[3]{r_g(DMG)^2}$ = radio medio geométrico del conjunto de los tres conductores

La impedancia propia de secuencia cero del forro metálico está dada por

$$Z_{00F} = 3r_F + 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{r_0} \quad \Omega/\text{km} \quad (2.63)$$

donde r_F es la resistencia del forro metálico en Ω/km .

Si el forro es de plomo con una resistividad de $0.3905 \Omega/\text{km}/\text{cm}^2$

$$r_F = \frac{0.3905}{(r_e^2 - r_i^2)\pi} = \frac{0.124}{r_e^2 - r_i^2} \Omega/\text{km}$$

$$r_0 = \frac{r_e + r_i}{2} = \text{radio medio del forro metálico}$$

La impedancia mutua de secuencia cero entre los tres conductores y el forro metálico está dada por

$$Z_{00M} = 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{r_0} \quad (2.64)$$

donde r_0 es el radio medio del forro metálico (que en el caso de los cables trifásicos es igual a la distancia media geométrica entre los tres conductores y el forro metálico).

2.4.2 Cables monofásicos

La impedancia propia de secuencia cero del grupo de tres conductores está dada por

$$Z_{00e} = r_e + 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{658\sqrt{\rho/f}}{\sqrt[3]{r_g(DMG)^2}} \Omega/\text{km} \quad (2.65)$$

donde

r_e resistencia efectiva de un conductor, Ω/km

f frecuencia, ciclos por segundo

ρ resistividad del terreno, $\Omega/\text{m}/\text{m}^2$

r_g radio medio geométrico de cada conductor

$DMG = \sqrt[3]{d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc}} = \text{distancia media geométrica entre los tres conductores}$

$\sqrt[3]{r_g(DMG)^2} = \text{radio medio geométrico del conjunto de los tres conductores}$

La impedancia propia de secuencia cero del grupo de tres forros metálicos está dada por

$$Z_{00F} = r_F + 0.002964f + j0.08676f \log_{10} \frac{658 \sqrt{\rho/f}}{\sqrt[3]{r_0 (DMG)^2}} \quad \Omega/\text{km} \quad (2.66)$$

donde

r_F resistencia efectiva de un forro metálico, Ω/km

r_0 radio medio del forro metálico

$$DMG = \sqrt[3]{d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc}}$$

$\sqrt[3]{r_0 (DMG)^2}$ = radio medio geométrico del conjunto de los tres forros metálicos

La impedancia mutua de secuencia cero entre los tres conductores y los tres forros metálicos es

$$Z_{00M} = 0.002964f + j0.008676f \log_{10} \frac{658 \sqrt{\rho/f}}{\sqrt[3]{r_0 (DMG)^2}} \quad \Omega/\text{km} \quad (2.67)$$

donde

r_0 radio medio del forro metálico

$$DMG = \sqrt[3]{d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc}}$$

$\sqrt[3]{r_0 (DMG)^2}$ = distancia media geométrica entre los tres conductores
y los tres forros metálicos

2.5 Reactancias capacitivas de las líneas de transmisión

2.5.1 Reactancias capacitivas de secuencia positiva, negativa y cero

La figura 2.16 representa una línea de transmisión constituida por un circuito trifásico. En la figura se muestran los tres conductores y sus imágenes con respecto a tierra.

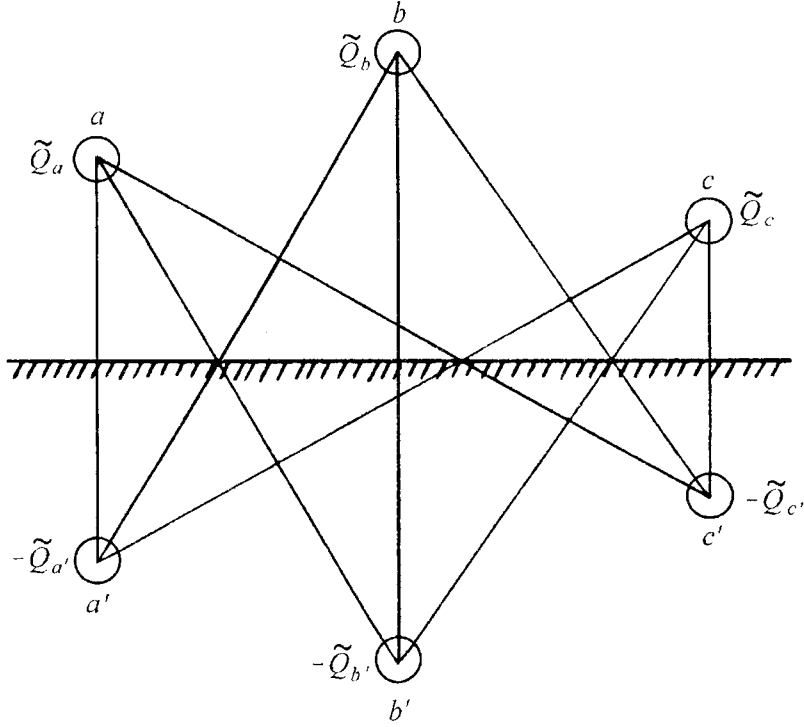


FIGURA 2.16 Conductores de una línea de transmisión trifásica y sus imágenes

Sean $\tilde{Q}_a$, $\tilde{Q}_b$ y $\tilde{Q}_c$ los valores eficaces de las cargas eléctricas de los tres conductores, en coulombs por metro de conductor.

Los voltajes al neutro de los tres conductores pueden expresarse en función de las cargas en la siguiente forma:

$$\tilde{V}_a = \left[\tilde{Q}_a \operatorname{Ln} \frac{1}{r} + \tilde{Q}_b \operatorname{Ln} \frac{1}{d_{ab}} + \tilde{Q}_c \operatorname{Ln} \frac{1}{d_{ac}} - \tilde{Q}_a \operatorname{Ln} \frac{1}{d_{aa'}} - \tilde{Q}_b \operatorname{Ln} \frac{1}{d_{ab'}} - \tilde{Q}_c \operatorname{Ln} \frac{1}{d_{ac'}} \right] 18 \times 10^9 \text{ V}$$

Agrupando términos

$$\tilde{V}_a = \left[\tilde{Q}_a \operatorname{Ln} \frac{d_{aa'}}{r} + \tilde{Q}_b \operatorname{Ln} \frac{d_{ab'}}{d_{ab}} + \tilde{Q}_c \operatorname{Ln} \frac{d_{ac'}}{d_{ac}} \right] 18 \times 10^9 \text{ V} \quad (2.68)$$

En forma análoga puede escribirse para los otros conductores, teniendo en cuenta que

$$d_{ab'} = d_{ba'}$$

$$d_{ac'} = d_{ca'}$$

$$d_{bc'} = d_{cb'}$$

$$\tilde{V}_b = \left[\tilde{Q}_a \operatorname{Ln} \frac{d_{ab'}}{d_{ab}} + \tilde{Q}_b \operatorname{Ln} \frac{d_{bb'}}{r} + \tilde{Q}_c \operatorname{Ln} \frac{d_{bc'}}{d_{bc}} \right] 18 \times 10^9 \text{ V} \quad (2.69)$$

$$\tilde{V}_c = \left[\tilde{Q}_a \operatorname{Ln} \frac{d_{ac'}}{d_{ac}} + \tilde{Q}_b \operatorname{Ln} \frac{d_{bc'}}{d_{bc}} + \tilde{Q}_c \operatorname{Ln} \frac{d_{cc'}}{r} \right] 18 \times 10^9 \text{ V} \quad (2.70)$$

Si se definen los coeficientes de potencial, tales que

$$P_{aa} = 18 \times 10^9 \operatorname{Ln} \frac{d_{aa'}}{r} = 41.4 \log_{10} \frac{d_{aa'}}{r} \quad \frac{1}{\mu F} \times \text{km}$$

$$P_{bb} = 18 \times 10^9 \operatorname{Ln} \frac{d_{bb'}}{r} = 41.4 \log_{10} \frac{d_{bb'}}{r} \quad \frac{1}{\mu F} \times \text{km}$$

$$P_{cc} = 18 \times 10^9 \operatorname{Ln} \frac{d_{cc'}}{r} = 41.4 \log_{10} \frac{d_{cc'}}{r} \quad \frac{1}{\mu F} \times \text{km}$$

$$P_{ab} = P_{ba} = 18 \times 10^9 \operatorname{Ln} \frac{d_{ab'}}{d_{ab}} = 41.4 \log_{10} \frac{d_{ab'}}{d_{ab}} \quad \frac{1}{\mu F} \times \text{km}$$

$$P_{ac} = P_{ca} = 18 \times 10^9 \operatorname{Ln} \frac{d_{ac'}}{d_{ac}} = 41.4 \log_{10} \frac{d_{ac'}}{d_{ac}} \quad \frac{1}{\mu F} \times \text{km}$$

$$P_{bc} = P_{cb} = 18 \times 10^9 \operatorname{Ln} \frac{d_{bc'}}{d_{bc}} = 41.4 \log_{10} \frac{d_{bc'}}{d_{bc}} \quad \frac{1}{\mu F} \times \text{km}$$

Las ecuaciones 2.68, 2.69 y 2.70 pueden escribirse así

$$\tilde{V}_a = P_{aa} \tilde{Q}_a + P_{ab} \tilde{Q}_b + P_{ac} \tilde{Q}_c$$

$$\tilde{V}_b = P_{ba} \tilde{Q}_a + P_{bb} \tilde{Q}_b + P_{bc} \tilde{Q}_c$$

$$\tilde{V}_c = P_{ca} \tilde{Q}_a + P_{cb} \tilde{Q}_b + P_{cc} \tilde{Q}_c$$

o en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_a \\ \tilde{V}_b \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aa} & P_{ab} & P_{ac} \\ P_{ba} & P_{bb} & P_{bc} \\ P_{ca} & P_{cb} & P_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q}_a \\ \tilde{Q}_b \\ \tilde{Q}_c \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Por otra parte, se tiene que

$$q = \int i dt$$

donde q es el valor instantáneo de la carga eléctrica de un conductor e i el valor instantáneo de la corriente capacitiva que circula por él.

Si se trata de un sistema de corriente alterna sinusoidal, el valor instantáneo de la corriente está dado por

$$i = I_{m\acute{a}x} \text{sen } \omega t$$

siendo $\omega = 2\pi f$.

Por tanto

$$q = \int I_{m\acute{a}x} \text{sen } \omega t dt$$

$$q = - \frac{I_{m\acute{a}x}}{\omega} \cos \omega t$$

pero

$$- \cos \omega t = \text{sen} \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$q = \frac{I_{m\acute{a}x}}{\omega} \text{sen} \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

o sea que la carga está atrasada 90° con respecto a la corriente capacitiva. Puede escribirse la siguiente expresión en función de los valores eficaces.

$$\tilde{Q} = -j \frac{\tilde{I}}{\omega} \quad (2.72)$$

Expresando en la ecuación 2.71 los valores de las cargas en función de las corrientes capacitivas.

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_a \\ \tilde{V}_b \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix} = \frac{-j}{\omega} \begin{bmatrix} P_{aa} & P_{ab} & P_{ac} \\ P_{ab} & P_{bb} & P_{bc} \\ P_{ca} & P_{cb} & P_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_a \\ \tilde{I}_b \\ \tilde{I}_c \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Los coeficientes de potencial son, dimensionalmente, iguales al recíproco de una capacitancia. Por tanto

$$\frac{P_{ij}}{\omega} = \frac{P_{ij}}{2\pi f} = X_{ij} \quad (2.74)$$

donde X_{ij} es una reactancia capacitiva.

La ecuación 2.73 puede escribirse, entonces, en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_a \\ \tilde{V}_b \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} X_{aa} & X_{ab} & X_{ac} \\ X_{ba} & X_{bb} & X_{bc} \\ X_{ca} & X_{cb} & X_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_a \\ \tilde{I}_b \\ \tilde{I}_c \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

donde

$$\begin{aligned} X_{aa} &= \frac{P_{aa}}{2\pi f} = \frac{18 \times 10^9 \times 10^{-6} \times 10^3 \times 2.3025}{2\pi f} \log_{10} \frac{d_{aa'}}{r} \quad \text{M}\Omega \times \text{km} \\ X_{aa} &= \frac{P_{aa}}{2\pi f} = \frac{6.596}{f} \log_{10} \frac{d_{aa'}}{r} \quad \text{M}\Omega \times \text{km} \\ X_{bb} &= \frac{P_{bb}}{2\pi f} = \frac{6.596}{f} \log_{10} \frac{d_{bb'}}{r} \quad \text{M}\Omega \times \text{km} \\ X_{cc} &= \frac{P_{cc}}{2\pi f} = \frac{6.596}{f} \log_{10} \frac{d_{cc'}}{r} \quad \text{M}\Omega \times \text{km} \\ X_{ab} &= X_{ba} = \frac{P_{ab}}{2\pi f} = \frac{6.596}{f} \log_{10} \frac{d_{ab'}}{d_{ab}} \quad \text{M}\Omega \times \text{km} \\ X_{ac} &= X_{ca} = \frac{P_{ac}}{2\pi f} = \frac{6.596}{f} \log_{10} \frac{d_{ac'}}{d_{ac}} \quad \text{M}\Omega \times \text{km} \\ X_{bc} &= X_{cb} = \frac{P_{bc}}{2\pi f} = \frac{6.596}{f} \log_{10} \frac{d_{bc'}}{d_{bc}} \quad \text{M}\Omega \times \text{km} \end{aligned} \quad (2.76)$$

La ecuación 2.75 puede escribirse abreviadamente

$$[\tilde{V}_{abc}] = -j[X_p][\tilde{I}_{abc}] \quad (2.77)$$

Si expresamos $[\tilde{V}_{abc}]$ e $[\tilde{I}_{abc}]$ en función de sus componentes simétricas

$$\begin{aligned} [\tilde{V}_{abc}] &= [A][\tilde{V}_{120}] \\ [\tilde{I}_{abc}] &= [A][\tilde{I}_{120}] \end{aligned} \quad (2.78)$$

donde

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \quad [\tilde{V}_{120}] = \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 \\ \tilde{V}_2 \\ \tilde{V}_0 \end{bmatrix} \quad [\tilde{I}_{120}] = \begin{bmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \\ \tilde{I}_0 \end{bmatrix}$$

y sustituimos los valores dados por las ecuaciones 2.78 en la ecuación 2.77

$$[A][\tilde{V}_{120}] = -j[X_p][A][\tilde{I}_{120}]$$

Premultiplicando ambos términos de la ecuación por la matriz

$$[A^{-1}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y recordando que $[A^{-1}][A] = [u]$ siendo $[u]$ una matriz unidad

$$[\tilde{V}_{120}] = -j[A^{-1}][X_p][A][\tilde{I}_{120}] \quad (2.79)$$

Se define la matriz de reactancias capacitivas de secuencia positiva, negativa y cero

$$[X_{120}] = [A^{-1}][X_p][A] \quad (2.80)$$

La ecuación 2.79 puede escribirse, entonces, en la siguiente forma:

$$[\tilde{V}_{120}] = -j[X_{120}][\tilde{I}_{120}] \quad (2.81)$$

La ecuación 2.81 puede escribirse en forma más explícita como sigue:

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{10} \\ X_{21} & X_{22} & X_{20} \\ X_{01} & X_{02} & X_{00} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{aa} & X_{ab} & X_{ac} \\ X_{ba} & X_{bb} & X_{bc} \\ X_{ca} & X_{cb} & X_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Efectuando las operaciones indicadas en 2.82 se tiene

$$X_{11} = X_{22} = 1/3(X_{aa} + X_{bb} + X_{cc}) - 1/3(X_{ab} + X_{ac} + X_{bc}) \quad (2.83)$$

$$X_{00} = 1/3(X_{aa} + X_{bb} + X_{cc}) + 2/3(X_{ab} + X_{ac} + X_{bc}) \quad (2.84)$$

$$X_{12} = 1/3(X_{aa} + a^2 X_{bb} + a X_{cc}) + 2/3(a X_{ab} + a^2 X_{ac} + X_{bc}) \quad (2.85)$$

$$X_{21} = 1/3(X_{aa} + a X_{bb} + a^2 X_{cc}) + 2/3(a^2 X_{ab} + a X_{ac} + X_{bc}) \quad (2.86)$$

$$X_{10} = X_{02} = 1/3(X_{aa} + a X_{bb} + a^2 X_{cc}) - 1/3(a^2 X_{ab} + a X_{ac} + X_{bc}) \quad (2.87)$$

$$X_{20} = X_{01} = 1/3(X_{aa} + a^2 X_{bb} + a X_{cc}) - 1/3(a X_{ab} + a^2 X_{ac} + X_{bc}) \quad (2.88)$$

2.5.2 Reactancia capacitiva de secuencia positiva y negativa

Sustituyendo los valores de las reactancias capacitivas propias y mutuas, dadas por las ecuaciones 2.76, en la ecuación 2.83, se obtiene

$$X_{11} = X_{22} = \frac{6.596}{f} \left[1/3 \left(\log_{10} \frac{d_{aa'} \times d_{bb'} \times d_{cc'}}{r^3} \right) - 1/3 \left(\log_{10} \frac{d_{ab'} \times d_{ac'} \times d_{bc'}}{d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc}} \right) \right]$$

$$X_{11} = X_{22} = \frac{6.596}{f} \log_{10} \frac{\sqrt[3]{d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc}}}{r} \times \frac{\sqrt[3]{d_{aa'} \times d_{bb'} \times d_{cc'}}}{\sqrt[3]{d_{ab'} \times d_{ca'} \times d_{bc'}}} \text{ M}\Omega \times \text{km} \quad (2.89)$$

Si la distancia entre conductores es pequeña comparada con la altura de los conductores sobre el piso, el término

$$\frac{\sqrt[3]{d_{aa'} \times d_{bb'} \times d_{cc'}}}{\sqrt[3]{d_{ab'} \times d_{ca'} \times d_{bc'}}}$$

es prácticamente igual a uno y la expresión para X_{11} y X_{22} queda

$$X_{11} = X_{22} = \frac{6.596}{f} \log_{10} \frac{\sqrt[3]{d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc}}}{r} \text{ M}\Omega \times \text{km} \quad (2.90)$$

2.5.3 Reactancia capacitiva de secuencia cero

Sustituyendo los valores de las reactancias capacitivas propias y mutuas, dadas por las ecuaciones 2.76 en la ecuación 2.84, se obtiene

$$X_{00} = \frac{6.596}{f} \left[\frac{1}{3} \left(\log_{10} \frac{d_{aa'} \times d_{bb'} \times d_{cc'}}{r^3} \right) + \frac{2}{3} \left(\log_{10} \frac{d_{ab'} \times d_{ca'} \times d_{bc'}}{d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc}} \right) \right]$$

$$X_{00} = 6.596f \log_{10} \frac{\sqrt[3]{d_{aa'} \times d_{bb'} \times d_{cc'} \times d_{ab'}^2 \times d_{ca'}^2 \times d_{bc'}^2}}{r \sqrt[3]{d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc}}} \text{ M}\Omega \times \text{km} \quad (2.91)$$

La ecuación anterior puede escribirse también así

$$X_{00} = \frac{6.596}{f} \times 3 \log_{10} \frac{\sqrt[9]{d_{aa'} \times d_{bb'} \times d_{cc'} \times d_{ab'}^2 \times d_{ca'}^2 \times d_{bc'}^2}}{\sqrt[3]{r \sqrt[3]{(d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc})^2}}} \text{ M}\Omega \times \text{km} \quad (2.92)$$

El numerador del quebrado del logaritmo es la distancia media geométrica entre los conductores y sus imágenes, y el denominador es el radio medio geométrico del conductor ficticio equivalente a los tres conductores en paralelo.

2.5.4 Reactancia mutuas entre las secuencias positiva, negativa y cero

Si existen transposiciones entre los conductores, las impedancias mutuas entre las secuencias positiva, negativa y cero se hacen cero. Aun en el caso en que no existan transposiciones, las mutuas entre secuencias son pequeñas y pueden generalmente despreciarse. La matriz de reactancias capacitivas de secuencia positiva, negativa y cero se convierte en una matriz diagonal.

$$[X_{120}] = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{00} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Las ecuaciones 2.81 se reducen entonces a las siguientes:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 &= -jX_{11}\tilde{I}_1 \\ \tilde{V}_2 &= -jX_{22}\tilde{I}_2 \\ \tilde{V}_0 &= -jX_{00}\tilde{I}_0 \end{aligned} \quad (2.94)$$

2.5.5 Cálculo de la reactancia capacitiva de secuencia cero mediante las tablas de características de líneas aéreas

La ecuación 2.91 puede escribirse en la siguiente forma:

$$X_{00} = \frac{4.098}{f} \left(\log_{10} \frac{1}{r} + \log_{10} \sqrt[3]{d_{aa'} \times d_{bb'} \times d_{cc'} (d_{ab'} \times d_{ac'} \times d_{bc'})^2} \right. \\ \left. - 2/3 \log_{10} d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc} \right) \quad \text{M}\Omega \times \text{mi}$$

Si se supone que

$$d_{aa'} = d_{bb'} = d_{cc'} = d_{ab'} = d_{ac'} = d_{bc'} = 2h$$

$$X_{00} = \frac{4.098}{f} \log_{10} \frac{1}{r} + \frac{3 \times 4.098}{f} \log_{10} 2h - \frac{2}{3} \times \frac{4.098}{f} \log_{10} d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc} \quad \text{M}\Omega \times \text{mi}$$

El término

$$x'_a = \frac{4.098}{f} \log_{10} \frac{1}{r} \quad \text{M}\Omega \times \text{mi}$$

que es función del radio del conductor y de la frecuencia, aparece en la tabla de características de los conductores.

El término

$$x'_e = \frac{12.294}{f} \log_{10} 2h \quad \text{M}\Omega \times \text{mi}$$

que es función de la altura de los conductores sobre el piso y de la frecuencia, aparece tabulado para alturas de 10 a 100 pies y para frecuencias de 25, 50 y 60 c.p.s.

El término

$$x'_d = \frac{4.098}{f} \log_{10} d_{ab} \times d_{ac} \times d_{bc}$$

$$X'_d = \frac{4.098}{f} \log_{10} d_{ab} + \frac{4.098}{f} \log_{10} d_{ac} + \frac{4.098}{f} \log_{10} d_{bc} \quad \text{M}\Omega \times \text{mi}$$

que es función de las distancias entre conductores, puede calcularse mediante las tablas que dan la componente de la reactancia capacitiva debida a la separación entre conductores.

En resumen, la reactancia capacitiva de secuencia cero de un circuito trifásico está dada por

$$X_{00} = x'_a + x'_e - 2/3 x'_d \quad \text{M}\Omega \times \text{mi}$$

$$x_d = (x'_{d_{ab}} + x'_{d_{ac}} + x'_{d_{bc}}) \quad (2.95)$$

CAPÍTULO 3

CIRCUITOS EQUIVALENTES DE SECUENCIA POSITIVA, NEGATIVA Y CERO DE TRANSFORMADORES

En este capítulo se estudiará la representación de un transformador trifásico, o de tres transformadores monofásicos conectados para formar un banco trifásico, funcionando en régimen permanente desequilibrado, mediante la aplicación de la teoría de las componentes simétricas.

Se mostró en el capítulo 1 que un sistema trifásico desequilibrado puede sustituirse por tres sistemas trifásicos: uno de secuencia positiva, uno de secuencia negativa y uno de secuencia cero. Por tanto, un transformador trifásico que funciona en régimen permanente desequilibrado debe representarse por tres circuitos equivalentes: uno de secuencia positiva, uno de secuencia negativa y uno de secuencia cero. Cada uno de estos circuitos equivalentes puede obtenerse mediante dos pruebas: una de circuito abierto y otra de cortocircuito, utilizando cantidades de la secuencia correspondiente.

3.1 Circuitos equivalentes de secuencia positiva

3.1.1 Prueba de circuito abierto

En la figura 3.1 se muestra un transformador trifásico conectado para la prueba de circuito abierto.

Si se aplica al primario del transformador un sistema de voltajes de secuencia positiva:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{A_1} &= V_{A_1} \angle 0^\circ \\ \tilde{V}_{B_1} &= V_{A_1} \angle 240^\circ \\ \tilde{V}_{C_1} &= V_{A_1} \angle 120^\circ\end{aligned}$$

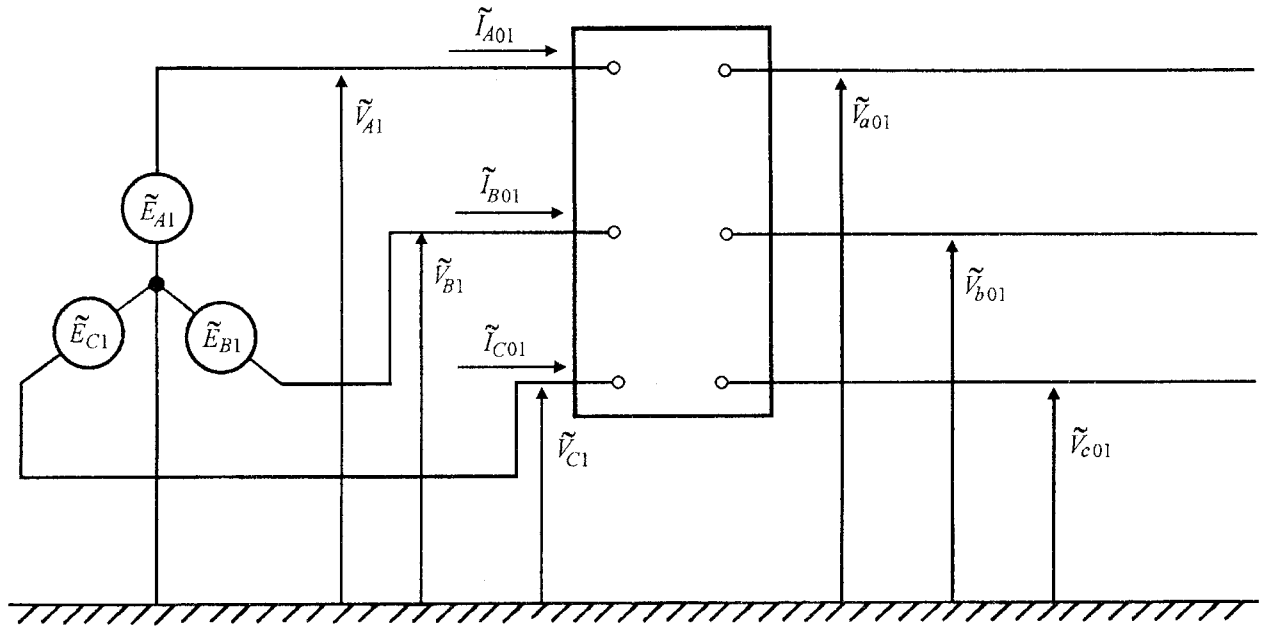


FIGURA 3.1 Prueba de circuito abierto de un transformador trifásico

Y se tiene el secundario en circuito abierto, los voltajes de circuito abierto en el secundario serán

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{a_{01}} &= r \tilde{V}_{A_1} \\ \tilde{V}_{b_{01}} &= r \tilde{V}_{B_1} \\ \tilde{V}_{c_{01}} &= r \tilde{V}_{C_1}\end{aligned}$$

donde r es la relación de transformación entre los voltajes al neutro de lado primario y del lado secundario.

La relación de transformación tendrá, en general, una magnitud y un ángulo.

El ángulo será igual a cero para las conexiones normales estrella-estrella y delta-delta, y será de $\pm 30^\circ$ para las conexiones normales estrella-delta y delta-estrella.

Además, se verifica que

$$\frac{\tilde{V}_{A_1}}{\tilde{I}_{A_{01}}} = \frac{\tilde{V}_{B_1}}{\tilde{I}_{B_{01}}} = \frac{\tilde{V}_{C_1}}{\tilde{I}_{C_{01}}} = Z_{ca_1}$$

3.1.2 Prueba de cortocircuito

En la figura 3.2 se muestra un transformador trifásico conectado para la prueba de cortocircuito.

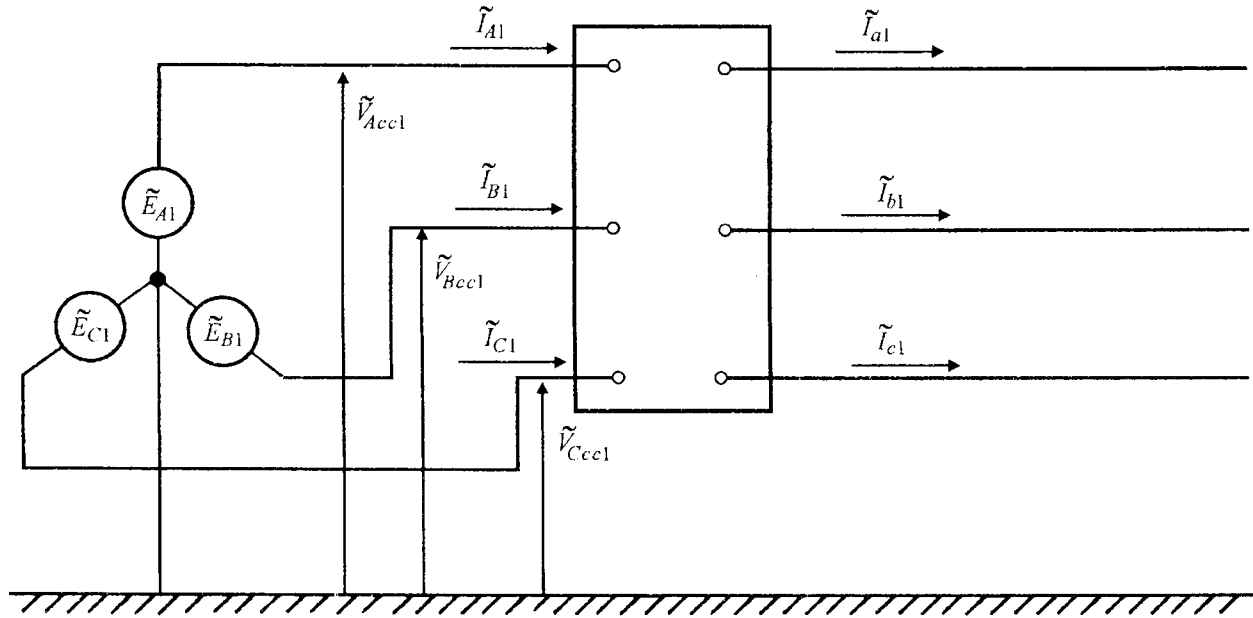


FIGURA 3.2 Prueba de cortocircuito de un transformador trifásico

Si se aplica a los devanados del transformador, en este caso del primario, un sistema de voltajes de secuencia positiva de valor reducido, tal que por los devanados primarios y secundarios (estando éstos en cortocircuito) circule la corriente normal de plena carga, se verifica

$$\frac{\tilde{V}_{A_{cc1}}}{\tilde{I}_{A_1}} = \frac{\tilde{V}_{B_{cc1}}}{\tilde{I}_{B_1}} = \frac{\tilde{V}_{C_{cc1}}}{\tilde{I}_{C_1}} = Z_{cc_1}$$

donde Z_{cc_1} es la impedancia de cortocircuito, en ohms, referida al primario.

Para cada fase del transformador puede establecerse el circuito equivalente de la figura 3.3.

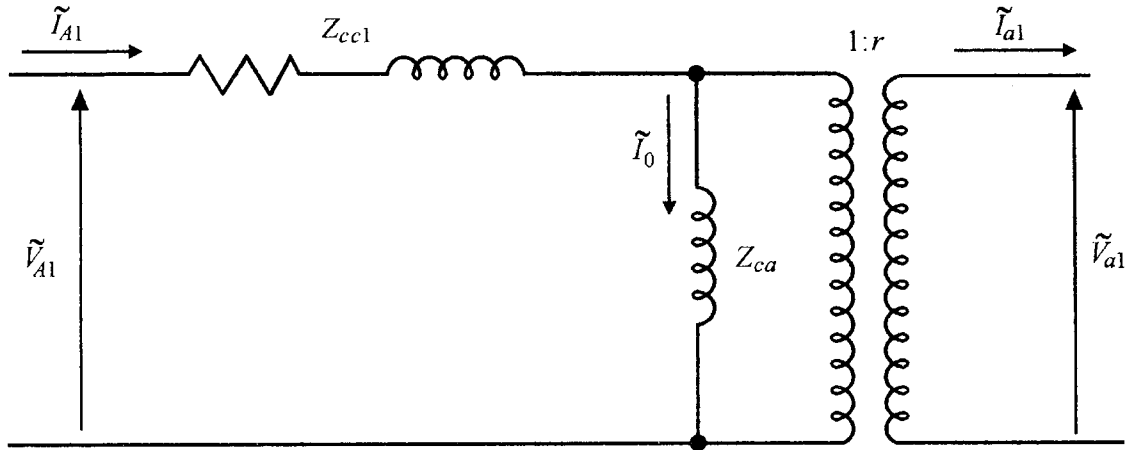


FIGURA 3.3 Circuito equivalente de secuencia positiva de una fase de un transformador trifásico

El transformador indicado en la figura 3.3 es un transformador ideal, que se utiliza para representar en el circuito equivalente la relación de transformación.

Como se explicó anteriormente, si las cantidades del circuito equivalente se expresan en por unidad, eligiendo una base de potencia trifásica $S_{3\phi}$ común para el lado primario y para el lado secundario, y si se eligen las bases de voltaje entre fases del primario y del secundario de manera que estén en la relación de transformación entre los voltajes entre fases, en vacío, del primario y del secundario:

$$\frac{V_{B_2}}{V_{B_1}} = |r|$$

en el circuito equivalente puede suprimirse el transformador ideal, como se muestra en la figura 3.4, que se aplica al caso en que el ángulo de r es cero.

Generalmente, la impedancia de circuito abierto Z_{ca} puede considerarse infinita, ya que es mucho mayor (unas 2 000 veces) que la impedancia de cortocircuito Z_{cc} , y el circuito equivalente puede simplificarse como se muestra en la figura 3.5.

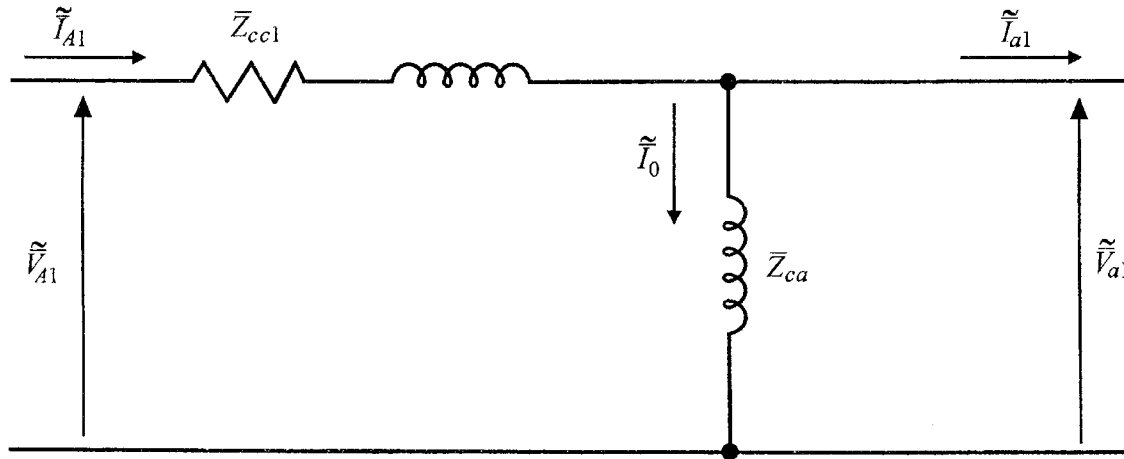


FIGURA 3.4 Circuito equivalente de secuencia positiva, en por unidad, de una fase de un transformador trifásico, para el caso en que el ángulo de r es cero

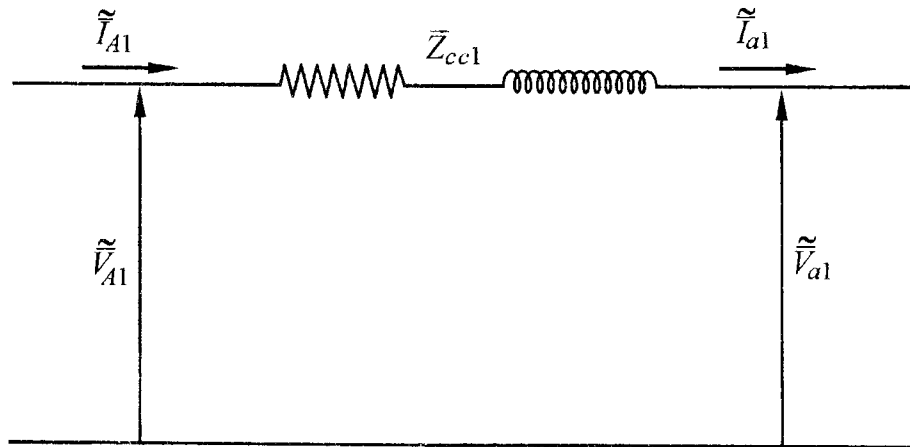


FIGURA 3.5 Circuito equivalente de secuencia positiva simplificado, en por unidad, de una fase de un transformador trifásico, para el caso en que el ángulo de r es cero

En el caso de transformadores conectados en estrella-estrella o en delta-delta, los voltajes en vacío del primario y los voltajes en vacío correspondientes al secundario están en fase, o sea, la relación de transformación tiene un ángulo igual a cero. Igualmente, las corrientes de línea del lado primario están en fase con las corrientes de línea correspondientes al lado secundario (despreciando la corriente de excitación), como se indica en los circuitos equivalentes de las figuras 3.4 y 3.5.

Si la conexión es estrella-delta se tiene un desfase de 30° entre las cantidades del primario y del secundario, como se muestra en la figura 3.6.

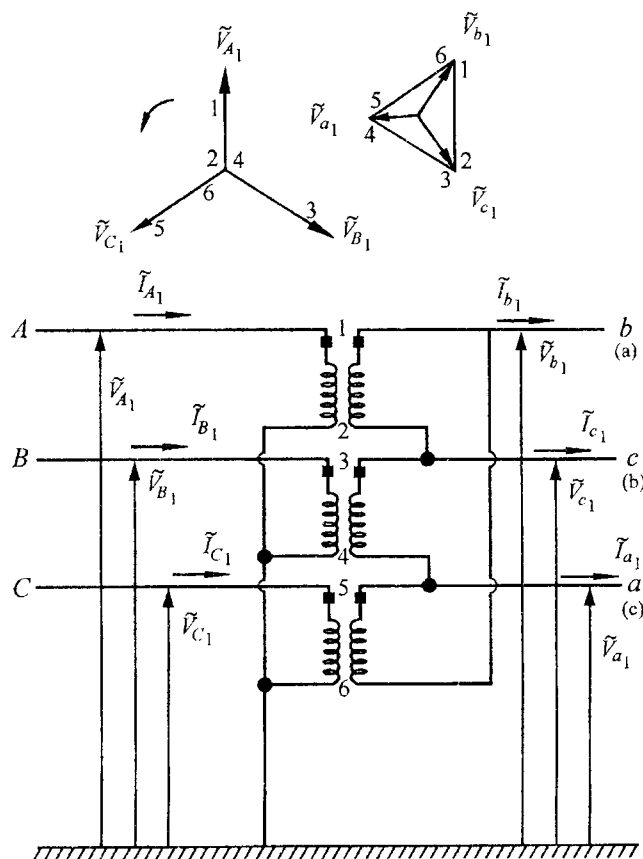


FIGURA 3.6 Desfasamiento entre los voltajes de secuencia positiva del primario y el secundario de un transformador trifásico conectado en estrella-delta

Si se aplica al primario del transformador trifásico de la figura 3.6 un sistema trifásico equilibrado de voltajes de secuencia positiva, los voltajes al neutro, en vacío, resultantes en las fases correspondientes del secundario están atrasadas 30° con respecto a los voltajes aplicados al primario, de acuerdo con la nomenclatura usual de las fases. Si se modifica la denominación de las fases del lado secundario, como se indica con las letras que están fuera de los paréntesis, los voltajes al neutro del lado conectado en delta están adelantados 90° con respecto a los voltajes al neutro correspondientes a la misma letra del lado conectado en estrella. Lo mismo ocurre con las corrientes.

Esta notación permite tomar en cuenta el desfase en el circuito equivalente, en por unidad, en una forma sencilla, como se muestra en la figura 3.7.

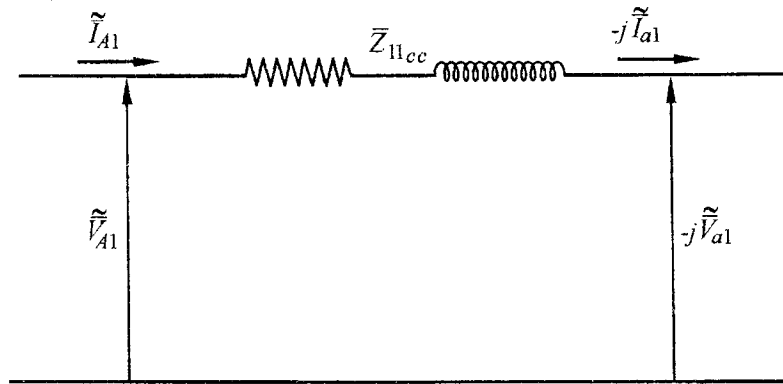


FIGURA 3.7 Circuito equivalente de secuencia positiva, en por unidad, de un transformador trifásico conectado en estrella-delta, como se muestra en la figura 3.6

3.2 Circuito equivalente de secuencia negativa

Para obtener el circuito equivalente de secuencia negativa de un transformador trifásico se realizan las pruebas de circuito abierto y de cortocircuito. Se aplica a los devanados de un lado del transformador un sistema de voltajes trifásicos equilibrados de secuencia negativa, de magnitud igual al voltaje nominal en el caso de la prueba de circuito abierto y de magnitud reducida en el caso de la prueba de cortocircuito; y con circuito abierto y cortocircuito, respectivamente, los devanados del otro lado.

Si el transformador trifásico está conectado en estrella-estrella o en delta-delta, los voltajes al neutro en vacío del primario y del secundario del transformador están en fase y las corrientes del primario y el secundario están también en fase, si se desprecia la corriente de excitación. En este caso el circuito del transformador es idéntico al circuito equivalente de secuencia positiva.

En la figura 3.8 se muestra el circuito equivalente de secuencia negativa, en por unidad, de un transformador trifásico conectado en estrella-estrella o en delta-delta, en el que se ha considerado infinita la impedancia de circuito abierto.

En el caso de transformadores trifásicos conectados en estrella-delta, el desfase entre los voltajes al neutro, del primario y del secundario, que se obtiene al aplicar al transformador un sistema de voltajes trifásicos equilibrados de secuencia negativa, es de signo contrario al que se obtiene al aplicarle un sistema de voltajes de secuencia positiva.

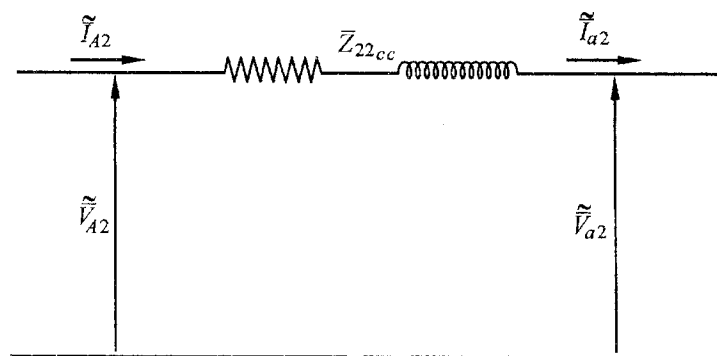


FIGURA 3.8 Circuito equivalente de secuencia negativa, en por unidad, de un transformador trifásico conectado en estrella-estrella o delta-delta

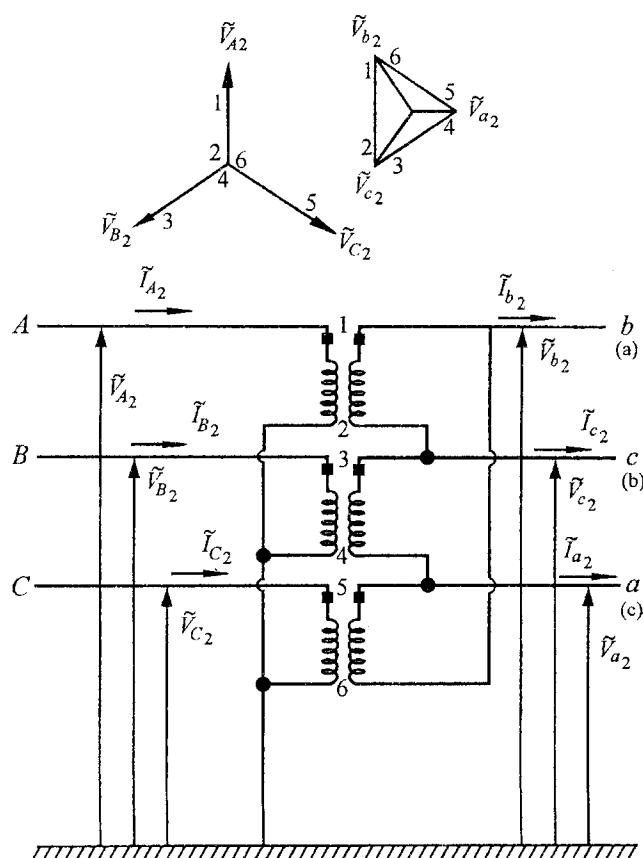


FIGURA 3.9 Desfasamiento entre los voltajes de secuencia negativa del primario y del secundario de un transformador trifásico conectado en estrella-delta

En efecto, considérese el transformador trifásico conectado en estrella-delta mostrado en la figura 3.9, al que se le aplica del lado conectado en estrella un sistema de voltajes de secuencia negativa. Los voltajes al neutro, en vacío, resultantes del lado conectado en delta están adelantados 30° con respecto a los voltajes correspondientes del lado conectado en estrella, de acuerdo con la nomenclatura usual de las fases.

Si se modifica la denominación de las fases del lado conectado en delta, como se indica con las letras que están fuera de los paréntesis los voltajes al neutro, en vacío, del lado conectado en delta, están atrasados 90° con respecto a los voltajes al neutro correspondientes a la misma letra del lado conectado en estrella. Lo mismo ocurre con las corrientes.

Esta notación permite tomar en cuenta el desfaseamiento en el circuito equivalente, en por unidad, en forma sencilla, como se muestra en la figura 3.10.

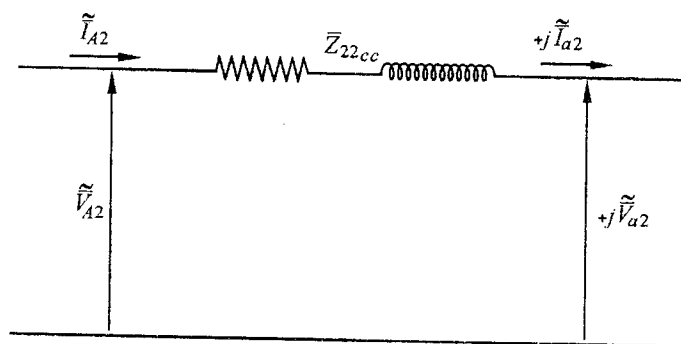


FIGURA 3.10 Circuito equivalente de secuencia negativa, en por unidad, de un transformador trifásico conectado en estrella-delta, como se muestra en la figura 3.9

EJEMPLO 3.1

Tres transformadores monofásicos tienen los siguientes datos de placa:

10 000 kVA
79 600/13 800 V
 $Z_{cc} = 7.5\%$

Los transformadores están conectados formando un banco trifásico de 30 000 kVA con conexión estrella en el lado primario, con un voltaje nominal entre líneas de 138 kV y conexión delta en el lado secundario, con un voltaje nominal entre líneas de 13.8 kV.

El banco de transformadores está conectado a un sistema eléctrico a través de una línea transmisión de 138 kV y a las barras colectoras de 13.8 kV de una subestación, de las que salen dos alimentadores trifásicos, como se indica en el diagrama unifilar de la figura 3.11.

Cada alimentador trifásico tiene un resistencia de $0.35 \Omega/\text{km}$ por fase y una reactancia inductiva de $j0.65 \Omega/\text{km}$ por fase.

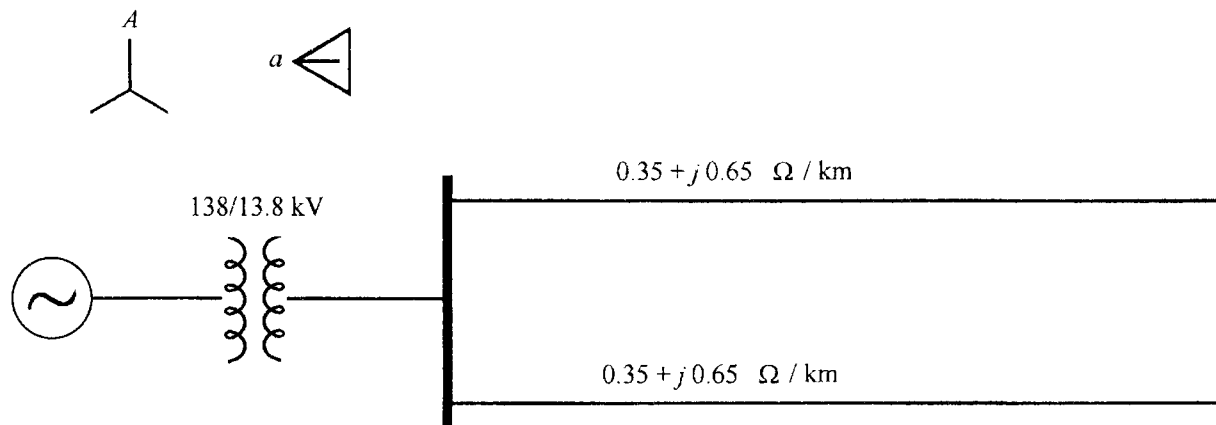


FIGURA 3.11 Diagrama unifilar del sistema trifásico correspondiente al ejemplo 3.1

1. Dibújese el circuito equivalente, en por unidad, monofásico y de fase a neutro, correspondiente al circuito trifásico equilibrado representado por el diagrama unifilar de la figura 3.11.

Empléese una base de potencia trifásica $S_{b3} = 25\,000 \text{ kVA}$ y una base de voltaje entre fases, del lado de alta tensión del transformador, de $V_{B1} = 132 \text{ kV}$. La impedancia de circuito abierto del transformador puede considerarse infinita y la capacitancia de los alimentadores puede despreciarse.

Indíquense en el circuito equivalente las impedancias, en por unidad, del banco de transformadores y de los alimentadores y las bases de potencia, voltaje, corriente e impedancia que corresponden a cada parte del circuito equivalente.

2. Supóngase que ocurre un cortocircuito trifásico en un alimentador, a una distancia de 2 km de la subestación cuando no se tiene carga conectada.

Calcúlese la corriente de cortocircuito, en por unidad, que circulará por cada fase del alimentador si el voltaje en las barras de alta tensión es de 128 kV entre líneas durante el cortocircuito.

Calcúlense las corrientes de la fase A, en amperes, a ambos lados del transformador durante el corto circuito y el voltaje entre fases, en volts, de las barras colectoras de 13.8 kV nominales.

Indíquense los ángulos de fase de todas las cantidades, usando como origen de los ángulos el voltaje al neutro de la fase A del lado de alta tensión del banco de transformadores.

SOLUCIÓN

1. Circuito equivalente en por unidad

Bases aplicables al lado de alta tensión del banco de transformadores

Base de potencia trifásica: $S_{B_{3\phi}} = 25\ 000\ \text{kVA}$

Base de voltaje entre fases: $V_{B_{1_1}} = 132\ \text{kV}$

Base de voltaje al neutro: $V_{B_{n_1}} = \frac{132}{\sqrt{3}} = 76.21\ \text{kV}$

Base de corriente: $I_{B_1} = \frac{25\ 000}{132\sqrt{3}} = 109.5\ \text{A}$

Base de impedancia: $Z_{b_1} = \frac{132^2}{25} = 697\ \Omega$

Bases aplicables al lado de baja tensión del banco de transformadores

Base de potencia trifásica: $S_{B_{3\phi}} = 25\ 000\ \text{kVA}$

Base de voltaje entre fases: $V_{B_{1_2}} = 132 \times \frac{13.8}{138} = 13.2\ \text{kV}$

Base de voltaje al neutro: $V_{B_{n_2}} = \frac{13.2}{\sqrt{3}} = 7.621\ \text{kV}$

Base de corriente:
$$I_{B_2} = \frac{25\,000}{13.2\sqrt{3}} = 1\,095\text{ A}$$

Base de impedancia:
$$Z_{B_2} = \frac{13.2^2}{25} = 6.97\ \Omega$$

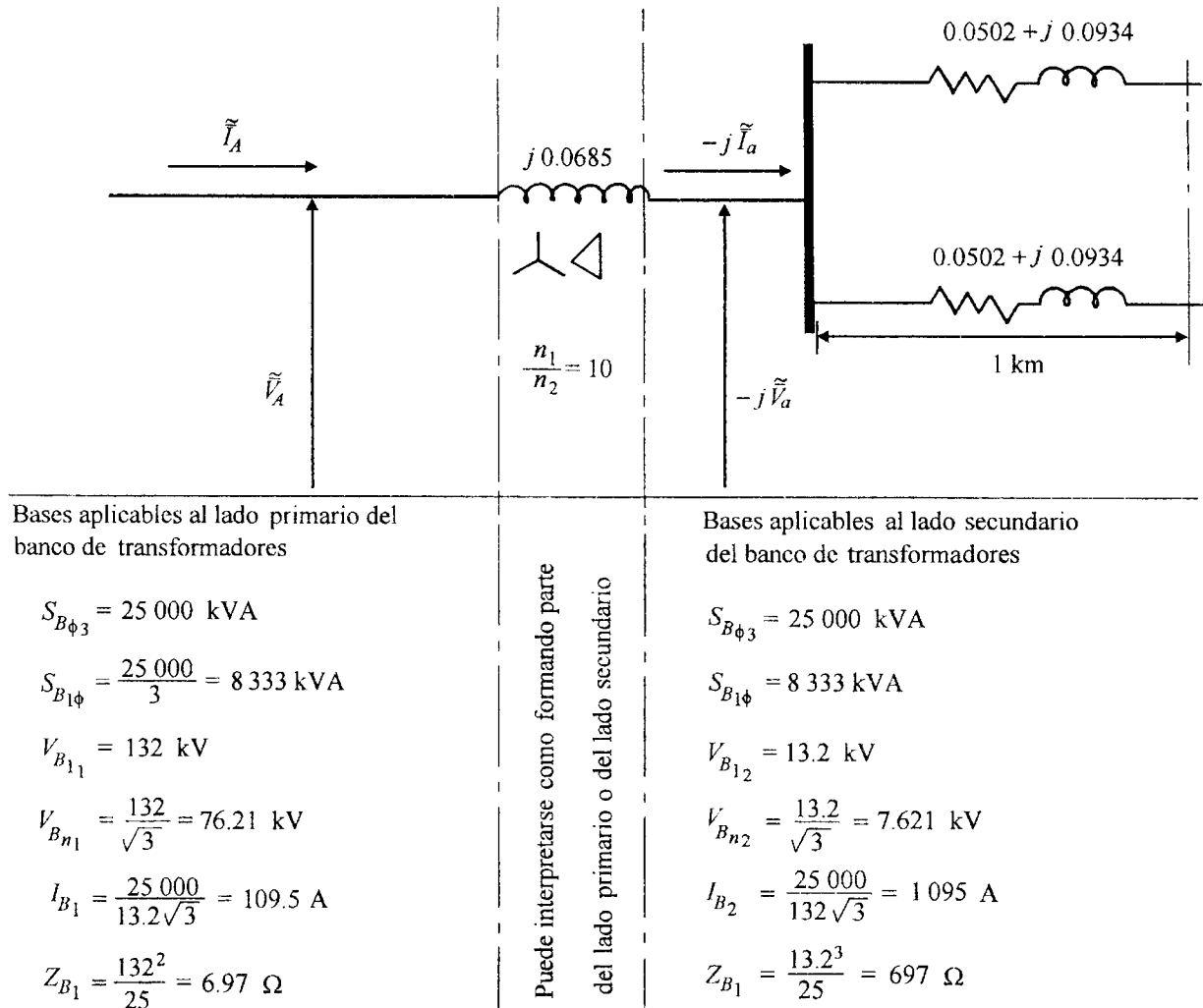


FIGURA 3.12 Circuito equivalente, en por unidad, monofásico, de fase a neutro, del sistema trifásico de la figura 3.11

La impedancia de cortocircuito, en por unidad, del banco de transformadores referida a los datos de placa, o sea

$S_{B_{3\phi}} = 3 \times 10\,000\text{ kVA}$, $V_{B_{l_1}} = 138\text{ kV}$ y $V_{B_{l_2}} = 13.8\text{ kV}$ es $Z_{cc} = j0.075$

Se requiere calcular la impedancia de cortocircuito referida a las bases

$$S'_{B_{3\phi}} = 25\ 000\ \text{kVA},\ V'_{B_{l_1}} = 132\ \text{kV},\ V'_{B_{l_2}} = 13.2\ \text{kV}$$

$$\bar{Z}'_{cc} = \bar{Z}_{cc} \left(\frac{V_{B_l}}{V'_{B_{l_1}}} \right)^2 \times \frac{S'_{B_{3\phi}}}{S_{B_{3\phi}}}$$

$$Z'_{cc} = j0.075 \left(\frac{138}{132} \right)^2 \times \frac{25\ 000}{30\ 000} = j0.0685$$

La impedancia, en por unidad, correspondiente a un kilómetro de longitud de una fase de un alimentador es

$$\bar{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_{B_2}} = \frac{0.35 + j0.65}{6.97} = 0.0502 + j0.0934$$

El circuito equivalente, en por unidad, monofásico, de fase a neutro, queda como se muestra en la figura 3.12.

2. Cálculo de las corrientes de cortocircuito y de los voltajes durante el cortocircuito

El circuito equivalente, en por unidad, correspondiente a las condiciones que se presentan al ocurrir un cortocircuito trifásico en un alimentador, a una distancia de 2 km, es como se muestra en la figura 3.13.

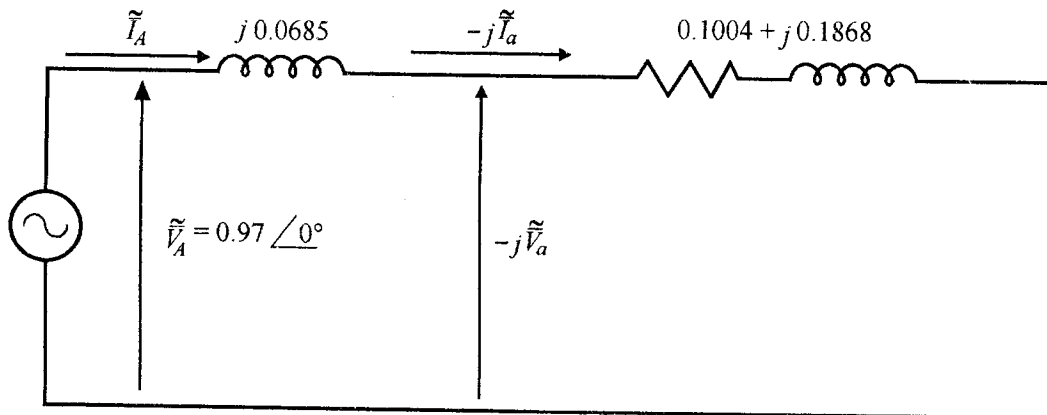


FIGURA 3.13 Circuito equivalente, en por unidad, que representa las condiciones correspondientes a un cortocircuito trifásico en uno de los alimentadores del sistema de la figura 3.11

La impedancia por fase, en por unidad, correspondiente a una longitud de 2 km del alimentador es

$$2(0.0502 + j0.09334) = 0.1004 + j0.1868 = 0.212 \angle 61.8^\circ$$

El voltaje al neutro en las barras de alta tensión durante el cortocircuito, en por unidad, tiene la siguiente magnitud:

$$\bar{V}_A = \frac{128}{132} = 0.97$$

Si el voltaje al neutro de la fase A del lado de alta tensión del banco de transformadores se usa como origen de los ángulos puede escribirse

$$\tilde{\tilde{V}}_A = 0.97 \angle 0^\circ$$

En el circuito de la figura 3.13 se verifica que

$$\tilde{\tilde{I}}_A = \frac{0.97 \angle 0^\circ}{0.1004 + j0.1868 + j0.0685} = \frac{0.97 \angle 0^\circ}{0.274 \angle 68.6^\circ} = 3.54 \angle -68.6^\circ$$

$$-j\tilde{\tilde{I}}_a = \tilde{\tilde{I}}_A = 3.54 \angle -68.6^\circ$$

$$\tilde{\tilde{I}}_a = j\tilde{\tilde{I}}_A = 3.54 \angle (90^\circ - 68.6^\circ) = 3.54 \angle 21.4^\circ$$

$$-j\tilde{\tilde{V}}_a = 3.54 \angle -68.6^\circ \times 0.212 \angle 61.8^\circ = 0.751 \angle -6.8^\circ$$

$$\tilde{\tilde{V}}_a = 0.751 \angle (90^\circ - 6.8^\circ) = 0.751 \angle 83.2^\circ$$

$$\tilde{\tilde{I}}_A = 3.54 \angle -68.6^\circ \times 109.5 = 387 \angle -68.6^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{\tilde{I}}_a = 3.54 \angle 21.4^\circ \times 1095 = 3870 \angle 21.4^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{\tilde{V}}_a = 0.751 \angle 83.2^\circ \times 7.621 = 5.723 \angle 83.2^\circ \text{ kV}$$

$$\tilde{\tilde{V}}_{ab} = 0.751 \angle 83.2^\circ \times 13.2 \angle 30^\circ = 9.9 \angle 113.2^\circ$$

A partir de las corrientes por fase y los voltajes al neutro calculados para la fase *a* pueden determinarse los valores correspondientes a las fases *b* y *c*, como se muestra en la figura 3.14.

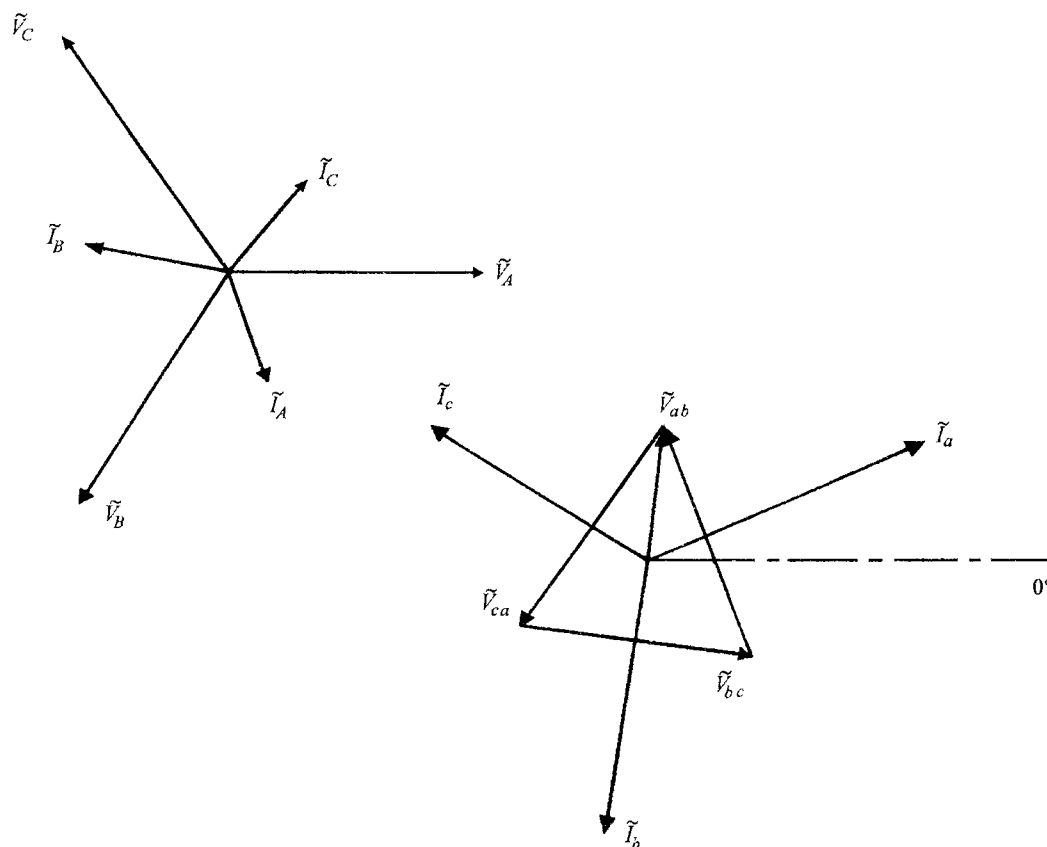


FIGURA 3.14 Corrientes y voltajes en las tres fases correspondientes a las condiciones del ejemplo 3.1

3.3 Circuitos equivalentes de secuencia cero de transformadores trifásicos

Para obtener el circuito equivalente de secuencia cero de un transformador trifásico se hace una prueba de circuito abierto y otra de circuito corto, aplicando al transformador un sistema de voltajes de secuencia cero, o sea, tres voltajes de igual magnitud y el mismo ángulo de fase.

El circuito equivalente de secuencia cero depende del tipo de conexión trifásica del transformador y de la forma de conectar el neutro, si lo tiene. A continuación se analizarán los casos más comunes.

3.3.1 Circuito equivalente de secuencia cero de transformadores conectados en estrella-estrella, con los neutros conectados directamente a tierra

En la figura 3.15 se representa un transformador trifásico conectado en estrella-estrella, con los neutros conectados directamente a tierra; al primario se le aplican tres voltajes de igual módulo

e igual ángulo de fase, que constituyen un sistema de voltajes de secuencia cero. El secundario se tiene en circuito abierto.

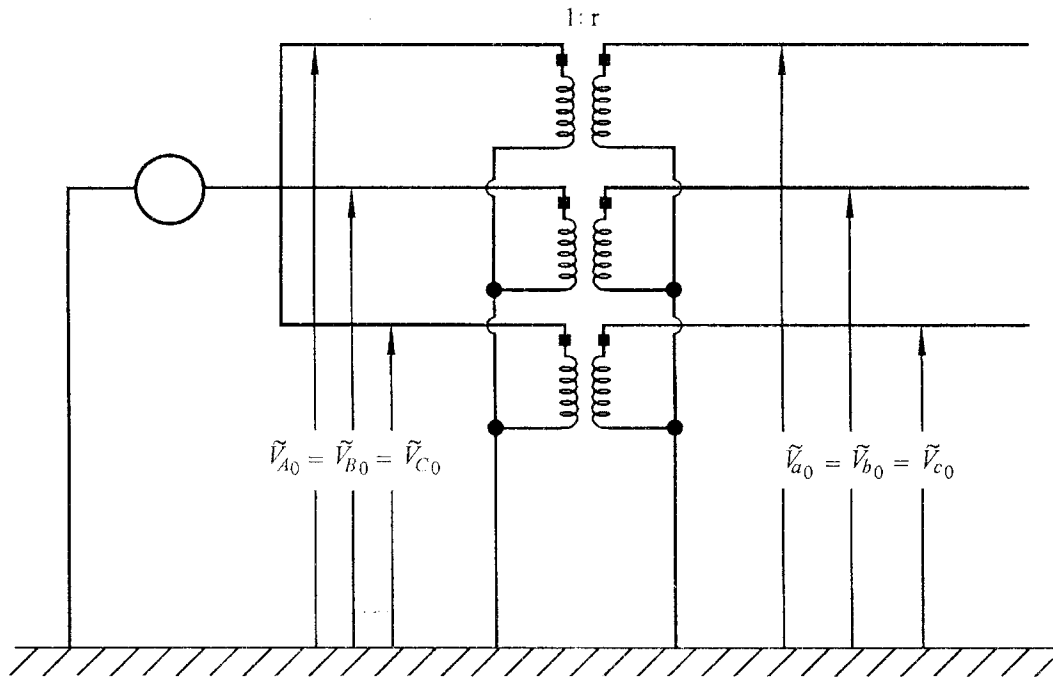


FIGURA 3.15 Prueba de circuito abierto para determinar el circuito equivalente de secuencia cero

Si r es la relación de transformación, se verificará en la prueba de circuito abierto

$$\tilde{V}_{a0} = r \tilde{V}_{A0}$$

$$\tilde{V}_{b0} = r \tilde{V}_{B0}$$

$$\tilde{V}_{c0} = r \tilde{V}_{C0}$$

Si se expresan los voltajes en por unidad, eligiendo las bases de voltaje a ambos lados del transformador de manera que estén en la misma relación que la relación de vueltas

$$\tilde{\tilde{V}}_{a0} = \tilde{\tilde{V}}_{A0}$$

$$\tilde{\tilde{V}}_{b0} = \tilde{\tilde{V}}_{B0}$$

$$\tilde{\tilde{V}}_{c0} = \tilde{\tilde{V}}_{C0}$$

En la figura 3.16 se muestra el mismo transformador conectado para una prueba de cortocircuito. La impedancia de cortocircuito de secuencia cero de cada fase está dada por

$$Z_{00_{cc}} = \frac{\tilde{V}'_{a0}}{\tilde{I}_{a0}} = \frac{\tilde{V}'_{b0}}{\tilde{I}_{b0}} = \frac{\tilde{V}'_{c0}}{\tilde{I}_{c0}}$$

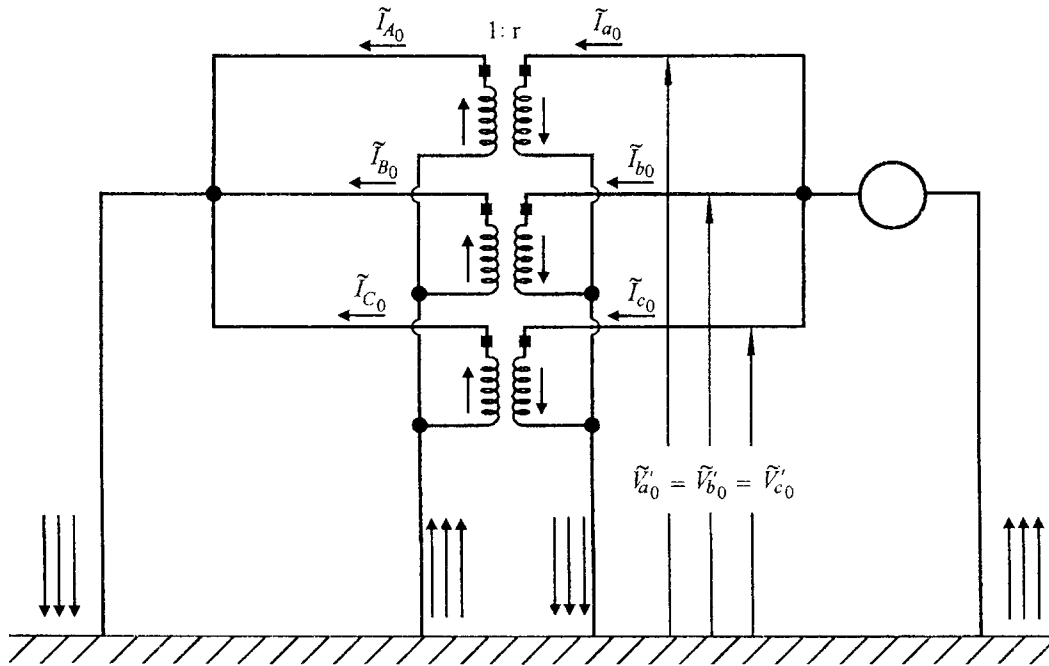


FIGURA 3.16 Prueba de cortocircuito para determinar el circuito equivalente de secuencia cero

El circuito equivalente, en por unidad, de cualquiera de las fases se muestra en la figura 3.17.

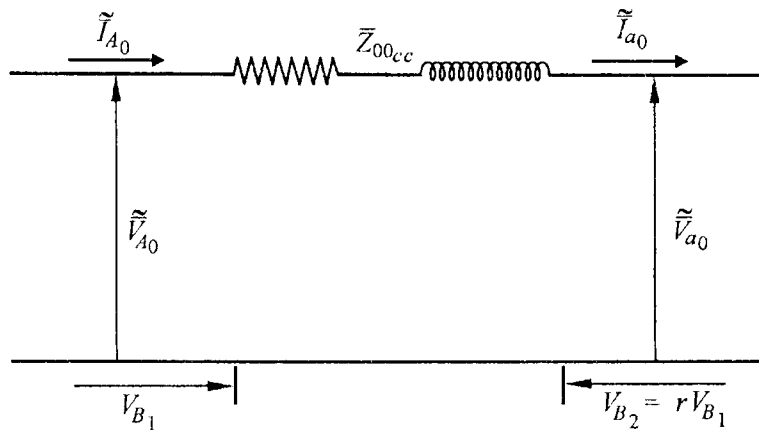


FIGURA 3.17 Circuito equivalente de secuencia-cero, en por unidad, de una fase de un transformador trifásico conectado en estrella-estrella con los neutros conectados directamente a tierra

3.3.2 Circuito equivalente de secuencia cero de transformadores conectados en estrella-estrella con los neutros conectados a tierra a través de impedancias

En la figura 3.18 se representa un transformador trifásico conectado en estrella-estrella con los neutros conectados a tierra a través de impedancias. Al primario del transformador se le aplican tres voltajes de igual módulo e igual ángulo de fase, que constituyen un sistema de voltajes de secuencia cero. El secundario del transformador alimenta una carga trifásica equilibrada conectada en estrella con el neutro a tierra.

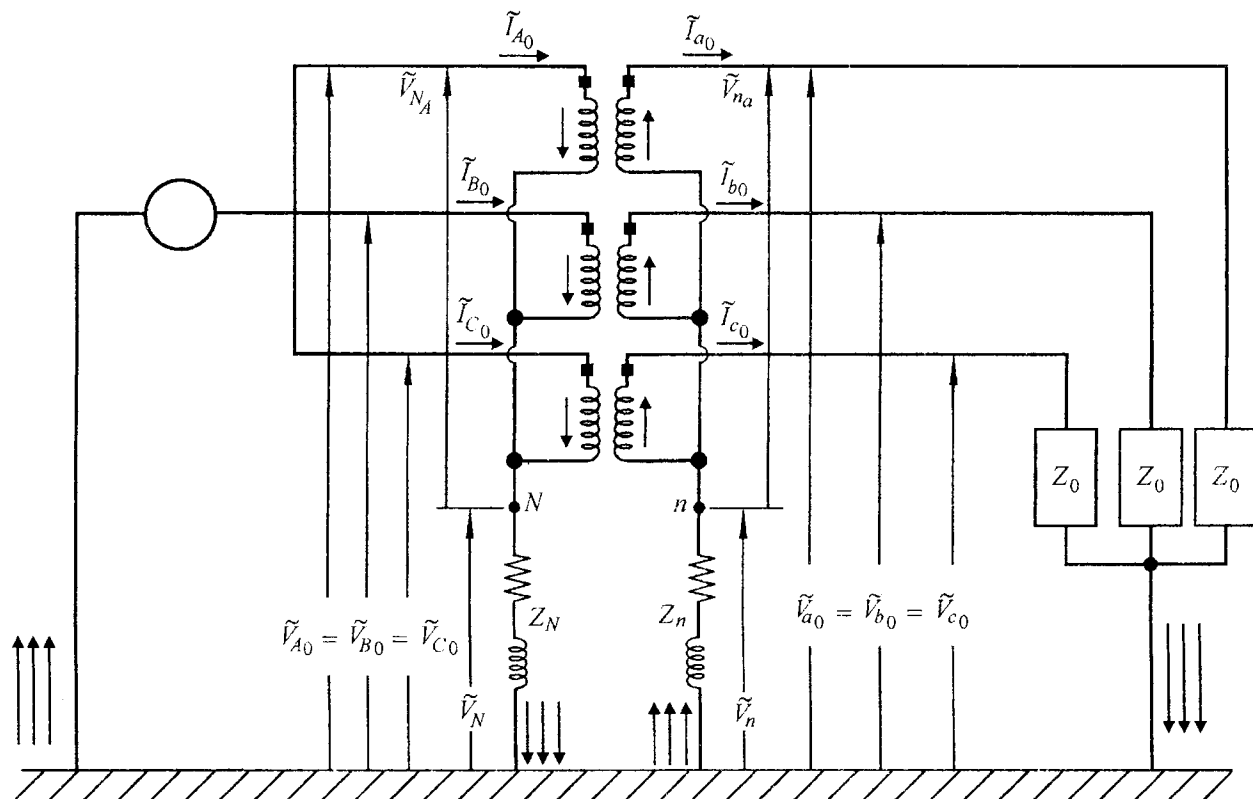


FIGURA 3.18 Transformador trifásico conectado en estrella-estrella con voltajes de secuencia cero aplicados al primario

Considérese una de las fases del transformador, por ejemplo la fase A. Expresando todas las cantidades en por unidad puede escribirse

$$\tilde{\tilde{V}}_{na} = \tilde{\tilde{V}}_{NA} - \tilde{\tilde{Z}}_{00_{cc}} \tilde{\tilde{I}}_{A0} \quad (3.1)$$

donde $Z_{00_{cc}}$ es la impedancia de cortocircuito de secuencia cero del transformador, en por unidad.

La ecuación 3.1 está representada por el circuito equivalente de la figura 3.19.

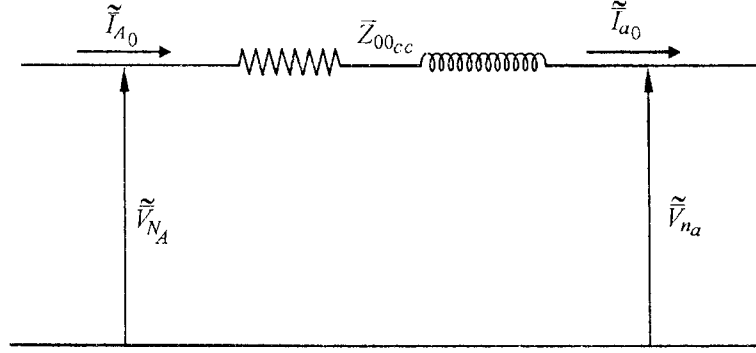


FIGURA 3.19 Circuito equivalente, en por unidad, de la ecuación 3.1

En el transformador de la figura 3.18 se verifica que

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{V}}_{NA} &= \tilde{\tilde{V}}_{A0} - \tilde{\tilde{V}}_N \\ \tilde{\tilde{V}}_{NA} &= \tilde{\tilde{V}}_{A0} - \bar{Z}_N 3\tilde{\tilde{I}}_{A0}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Se verifica también que

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{V}}_{na} &= \tilde{\tilde{V}}_{a0} - (-\tilde{\tilde{V}}_n) = \tilde{\tilde{V}}_{a0} + \tilde{\tilde{V}}_n \\ \tilde{\tilde{V}}_{na} &= \tilde{\tilde{V}}_{a0} + \bar{Z}_n 3\tilde{\tilde{I}}_{a0}\end{aligned}\tag{3.3}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.2 y 3.3 en la ecuación 3.1

$$\tilde{\tilde{V}}_{a0} + \bar{Z}_n 3\tilde{\tilde{I}}_{a0} = \tilde{\tilde{V}}_{A0} - \bar{Z}_N 3\tilde{\tilde{I}}_{A0} - \bar{Z}_{00_{cc}} \tilde{\tilde{I}}_{a0}$$

y como $\tilde{\tilde{I}}_{a0} = \tilde{\tilde{I}}_{A0}$

$$\tilde{\bar{V}}_{A0} - \tilde{\bar{V}}_{a0} = \left(3\bar{Z}_n + \bar{Z}_{00_{cc}} + 3\bar{Z}\bar{Z}_n \right) \tilde{\bar{I}}_{A0} \quad (3.4)$$

La ecuación 3.4 puede representarse mediante el circuito equivalente de la figura 3.20.

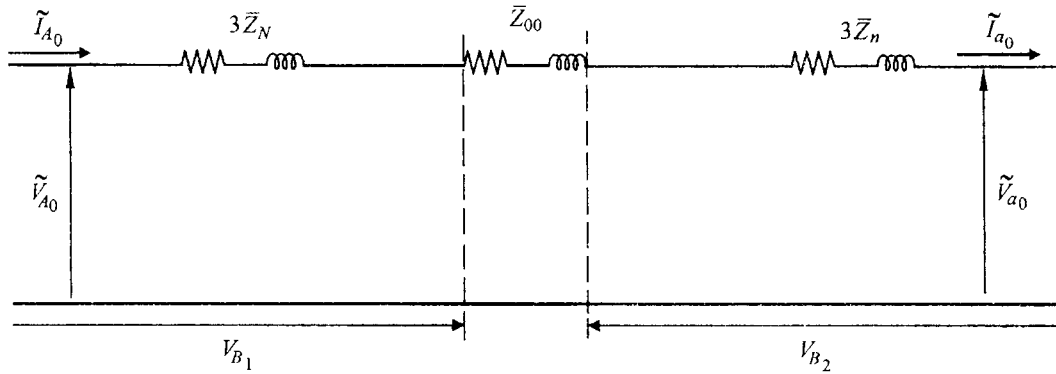


FIGURA 3.20 Circuito equivalente de secuencia cero, en por unidad, de un transformador trifásico conectado en estrella-estrella con los neutros conectados a tierra a través de impedancias

3.3.3 Circuito equivalente de secuencia cero de transformadores conectados en estrella-estrella con neutro aislado

Si el neutro del primario o del secundario no está conectado a tierra, puede considerarse que la impedancia Z_N o Z_n es infinita; lo que equivale a un circuito abierto en el circuito equivalente, como se muestra en la figura 3.21.

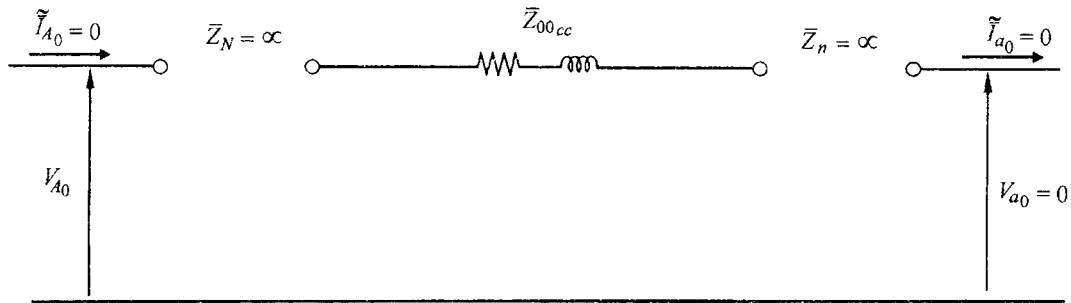


FIGURA 3.21 Circuito equivalente de secuencia cero, en por unidad, de un transformador trifásico conectado en estrella-estrella con los neutros aislados

En otras palabras, el hecho de que uno cualquiera de los neutros no esté conectado a tierra impide que circule la corriente de secuencia cero por el transformador y éste aparece, en el circuito equivalente de secuencia cero, como un circuito abierto.

3.3.4 Circuito equivalente de secuencia cero de un transformador trifásico conectado en delta-delta

En la figura 3.22 se muestra un transformador trifásico conectado en delta-delta, al primario de éste se le aplican tres voltajes de igual módulo e igual ángulo de fase.

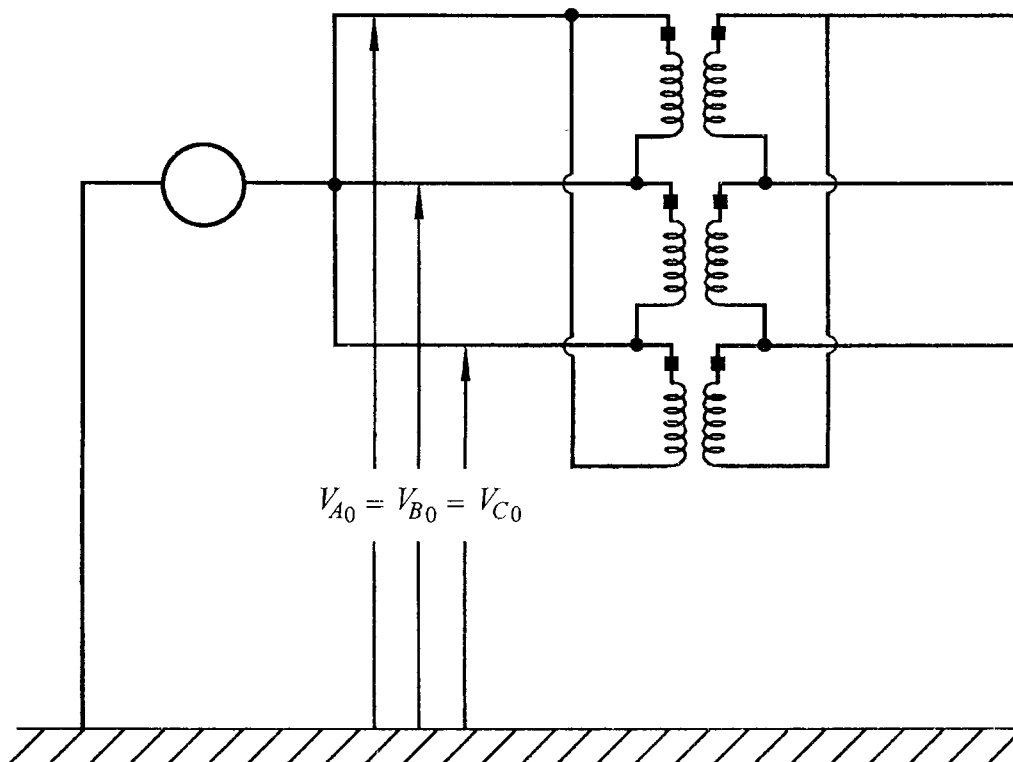


FIGURA 3.22 Transformador trifásico conectado en delta-delta

Como no existe ningún circuito de regreso para las corrientes de secuencia cero, éstas no pueden circular, el transformador aparece en el circuito equivalente de secuencia cero como un circuito abierto, tal como se indica en la figura 3.23.

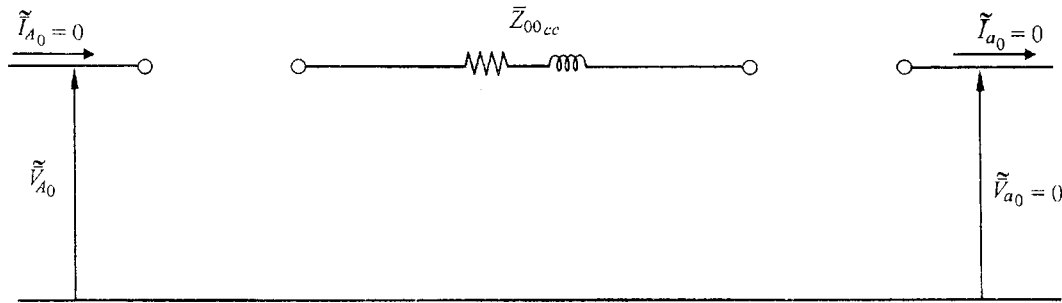


FIGURA 3.23. Circuito equivalente de secuencia cero, en por unidad, de un transformador trifásico conectado en delta-delta

3.3.5 Circuito equivalente de secuencia cero de un transformador conectado en estrella con neutro a tierra en el primario y delta en el secundario

En la figura 3.24 se muestra un transformador trifásico con el primario en estrella, el neutro conectado directamente a tierra y el secundario en delta.

Si se le aplican al transformador tres voltajes de igual módulo e igual argumento, del lado en que está conectado en estrella con neutro a tierra, circularán tres corrientes iguales de secuencia cero por los tres devanados primarios y la suma de estas tres corrientes por el neutro. Por cada devanado secundario circulará también una corriente de secuencia cero, pero estas corrientes de secuencia cero no pueden circular por la línea conectada a los devanados en delta. Por tanto, para el caso de tres voltajes de secuencia cero aplicados del lado conectado en estrella, el transformador aparece como conectado en corto circuito del lado de la delta y la impedancia de secuencia cero de cortocircuito vista desde el lado en estrella es igual a

$$Z_{00cc} = \frac{\tilde{V}_{A0}}{\tilde{i}_{A0}}$$

Si se aplican tres voltajes de secuencia cero del lado conectado en delta, no podrá circular ninguna corriente de secuencia cero, ya que no existe ningún circuito de regreso para estas corrientes.

En consecuencia, el circuito equivalente de secuencia cero, en por unidad, de un transformador conectado en estrella con neutro a tierra-delta queda como se indica en la figura 3.25.

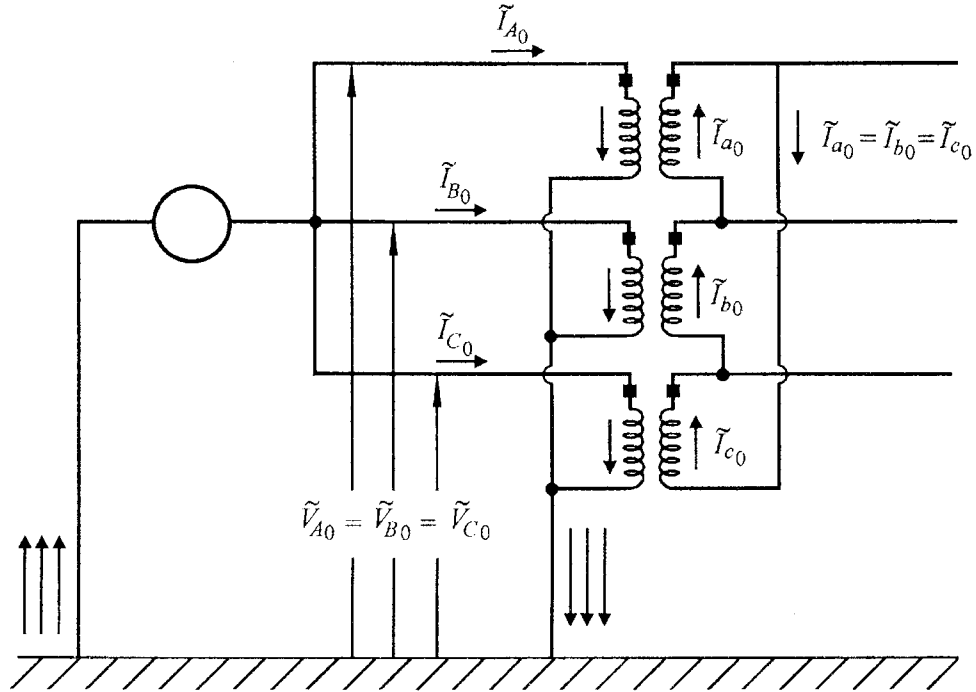


FIGURA 3.24 Transformador trifásico conectado en estrella-delta con el neutro directamente a tierra

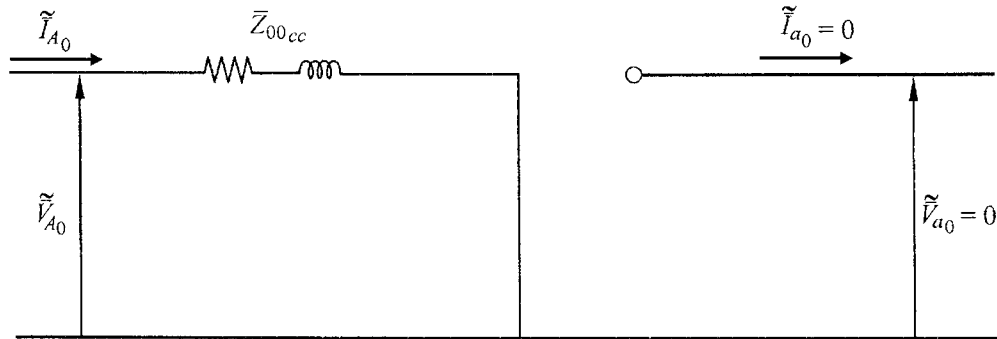


FIGURA 3.25 Circuito equivalente de secuencia cero en por unidad, de un transformador trifásico conectado en estrella-delta con el neutro directamente a tierra

En la figura 3.26 se muestra el caso de un transformador trifásico conectado en estrella-delta, con el neutro conectado a tierra a través de una impedancia. En dicho transformador se verifica, de acuerdo con el circuito equivalente de la figura, que:

$$V_{NA} = I_{A0} Z_{00cc} \quad (3.5)$$

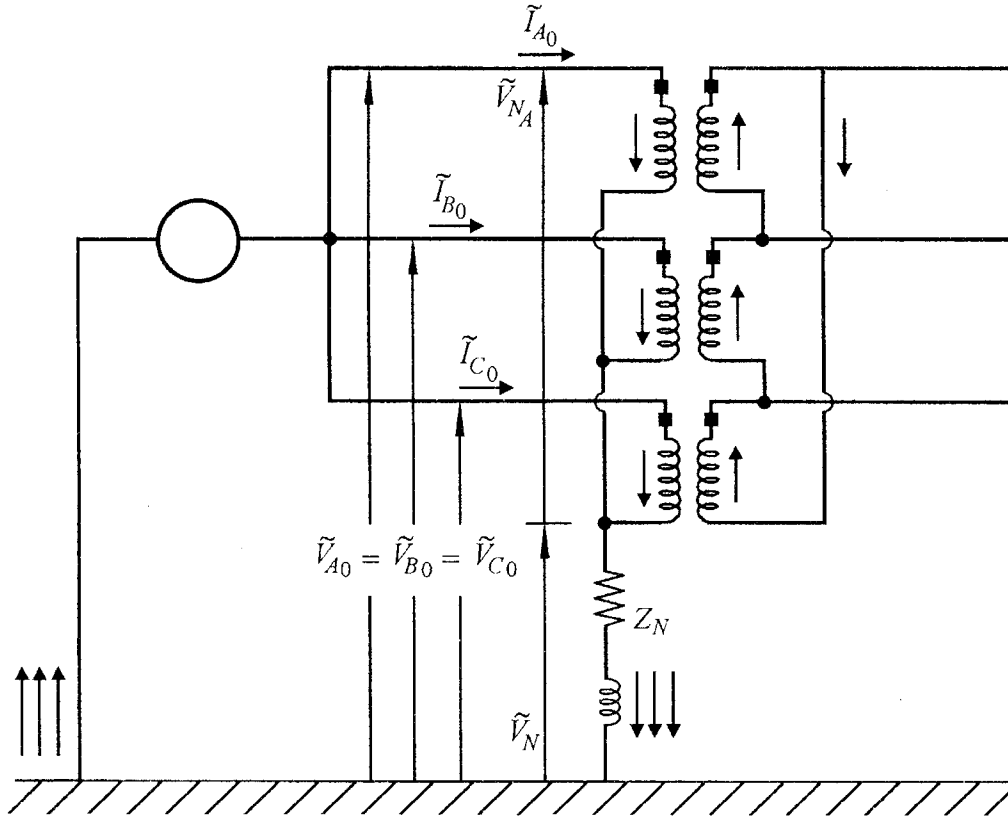


FIGURA 3.26 Transformador trifásico conectado en estrella-delta con el neutro a tierra a través de una impedancia.

Se verifica también que

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{NA} &= \tilde{V}_{A0} - \tilde{V}_N \\ \tilde{V}_{NA} &= \tilde{V}_{A0} - 3\tilde{I}_{A0}Z_N\end{aligned}\tag{3.6}$$

Igualando las dos expresiones anteriores y expresando todas las cantidades en por unidad

$$\tilde{\tilde{V}}_{A0} = \tilde{\tilde{I}}_{A0}(\bar{Z}_{00_{cc}} + 3\bar{Z}_N)\tag{3.7}$$

La ecuación anterior queda representada por el circuito equivalente de la figura 3.27.

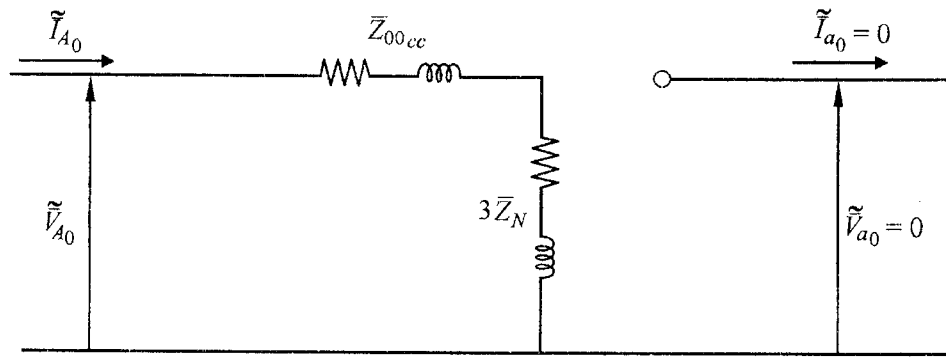


FIGURA 3.27 Circuito equivalente de secuencia cero, en por unidad, de un transformador trifásico conectado en estrella-delta, con el neutro a tierra a través de una impedancia

3.4 Valor de las impedancias de secuencia cero

3.4.1 Impedancia de cortocircuito

En los bancos trifásicos formados por tres transformadores monofásicos iguales y en los transformadores trifásicos del tipo acorazado o del tipo de cinco columnas, la impedancia de cortocircuito de secuencia cero es igual a las impedancias de cortocircuito de secuencia positiva y negativa.

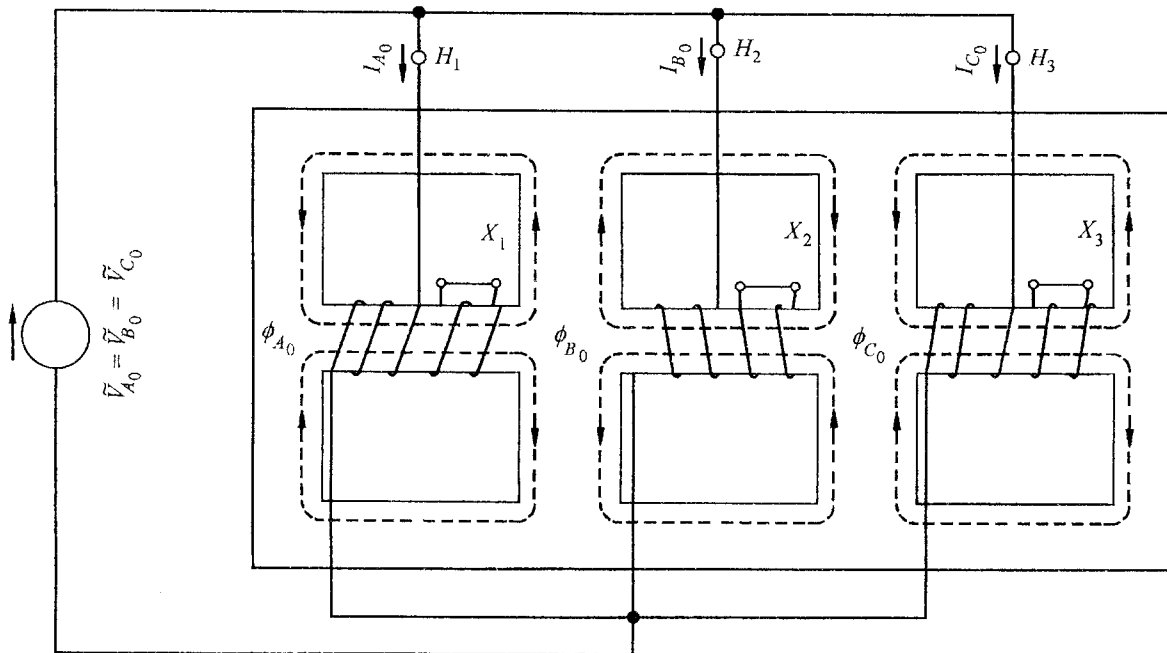


FIGURA 3.28 Diagrama esquemático de un transformador trifásico del tipo acorazado, con el primario en estrella, conectado para una prueba de cortocircuito de secuencia cero

En los transformadores trifásicos del tipo de tres columnas la impedancia de cortocircuito de secuencia cero puede ser alrededor de 15% menor que las impedancias de secuencia cero, positiva y negativa, debido a la configuración de los flujos magnéticos de secuencia cero, como se explica a continuación.

En las figuras 3.28, 3.29 y 3.30 se muestra, respectivamente, el diagrama esquemático de un transformador de los tipos acorazado, cinco columnas y tres columnas conectados para una prueba de cortocircuito de secuencia cero. Nótese que en el transformador acorazado los devanados de la fase central están invertidos con respecto a los de las fases laterales.

En los transformadores trifásicos del tipo acorazado y del tipo de cinco columnas los flujos magnéticos de las tres fases, que están en fase, se cierran a través del hierro del núcleo magnético. En cambio, en los transformadores trifásicos del tipo de tres columnas el circuito magnético se completa a través del aire y las paredes del tanque, lo que hace que la reluctancia del circuito magnético sea mayor y en consecuencia disminuya el valor de la impedancia de cortocircuito. En efecto, recuérdese que

$$L = N \frac{d\phi}{di} = N \frac{\tilde{\phi}}{\tilde{I}}$$

$$\tilde{\phi} = \frac{N\tilde{I}}{\mathfrak{R}} \quad \therefore L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$$

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi f \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$$

donde

X_L	reactancia inductiva
L	inductancia
f	frecuencia
N	número de vueltas de la bobina
$\mathfrak{R}$	reluctancia del circuito magnético

Es decir, la reactancia es inversamente proporcional a la reluctancia. Resulta, pues, que la impedancia de cortocircuito de un transformador trifásico del tipo de tres columnas es menor que la de los otros dos tipos de transformadores trifásicos.

3.4.2 Impedancia de circuito abierto

En el caso de un banco trifásico formado por tres transformadores monofásicos iguales, la impedancia de circuito abierto de secuencia cero es igual a la impedancia de circuito abierto de secuencia positiva o negativa y, por tanto, muy grande comparada con la impedancia de cortocircuito. En la práctica, generalmente, aquélla puede considerarse infinita y no necesita representarse en el circuito equivalente, lo que equivale a despreciar la corriente de excitación.

En los transformadores trifásicos la impedancia de circuito abierto de secuencia cero puede ser bastante menor que la impedancia de circuito abierto de secuencia positiva o negativa, dependiendo del tipo del transformador y en ocasiones puede ser necesario representarla en el circuito equivalente mediante una impedancia en derivación.

Lo anterior se aplica especialmente a los transformadores trifásicos tipo núcleo, de tres columnas, por las mismas razones que se expusieron para la impedancia de corto circuito de secuencia cero: con este tipo de construcción los flujos magnéticos de secuencia cero de las tres fases, producidos por las corrientes de excitación de secuencia cero, que están en fase, se cierran a través del aire y las paredes del tanque, lo que aumenta la reluctancia del circuito magnético y disminuye el valor de la impedancia de circuito abierto correspondiente.

Pueden darse los siguientes valores aproximados de reactancias de circuito abierto de secuencia cero, en por unidad, para un voltaje aplicado igual al voltaje nominal

$$\widetilde{V}_{a0} = \widetilde{V}_{b0} = \widetilde{V}_{c0} = 1$$

Transformador	Reactancia en por unidad
Trifásico del tipo acorazado o del tipo de cinco columnas	1 a 5
Trifásico del tipo de tres columnas	0.5 a 1

En la figura 3.31 se muestra el circuito equivalente de secuencia cero de un transformador trifásico conectado en estrella-estrella, con los neutros conectados a tierra a través de impedancias, en el cual se ha tomado en cuenta la impedancia de circuito abierto.

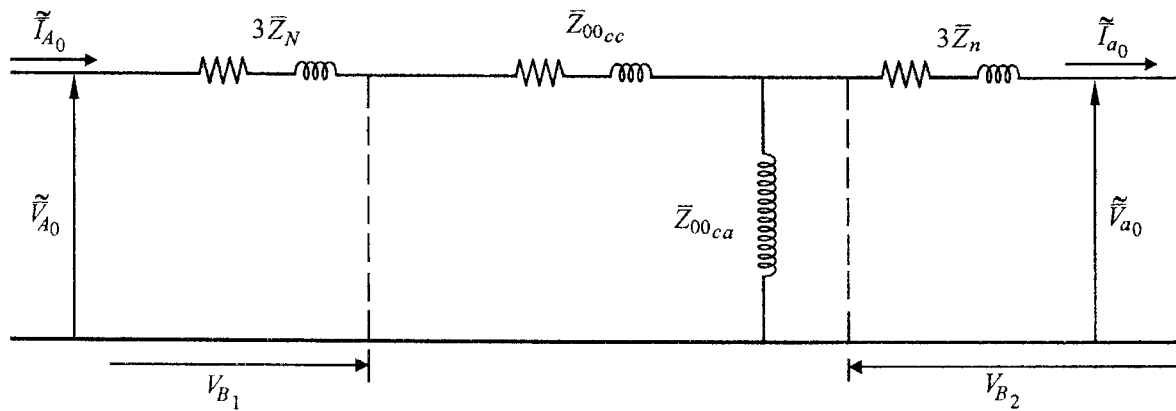


FIGURA 3.31 Circuito equivalente de secuencia cero, en por unidad, de un transformador trifásico conectado en estrella-estrella, con los neutros a tierra a través de impedancias, incluyendo la impedancia de circuito abierto

EJEMPLO 3.2

Se tiene un transformador trifásico conectado en delta-estrella, como se indica en la figura 3.32.

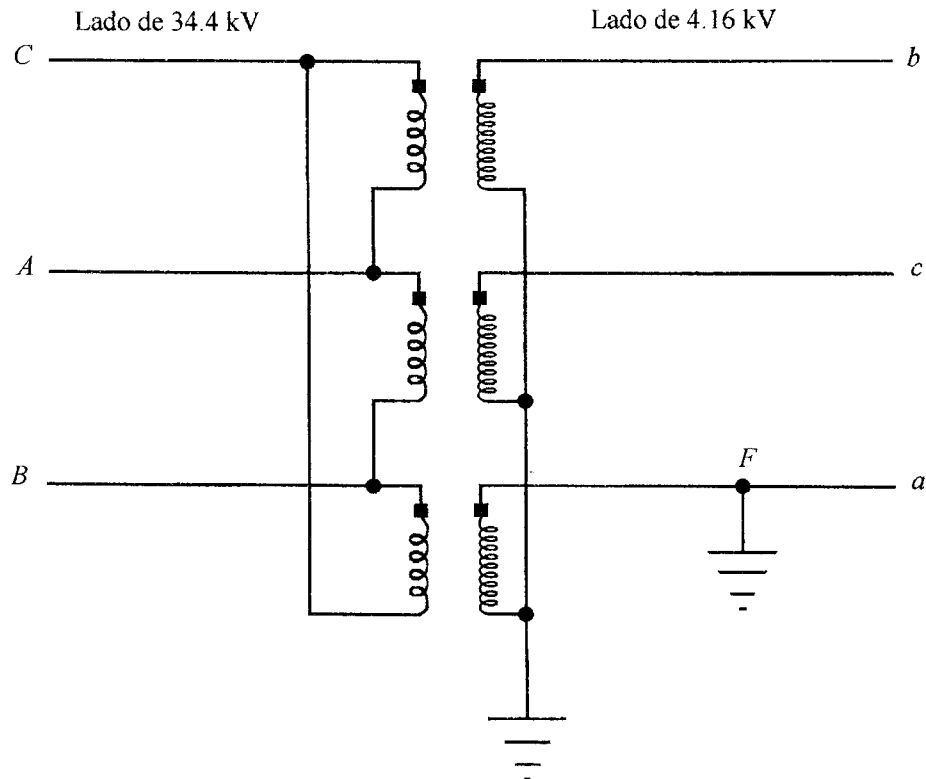


FIGURA 3.32 Conexión de transformador del ejemplo 3.2 mostrando el punto de la falla a tierra

Los datos de placa del transformador son:

Capacidad trifásica	1 500 kVA
Voltajes entre líneas	34 400/4 160 V
Impedancia de cortocircuito	$Z_{cc} = 7.0\%$

El transformador es del tipo núcleo de tres columnas por lo que la impedancia de secuencia cero es del orden del 85% de la impedancia de secuencia positiva.

Supóngase que ocurre una falla en el punto F del lado de 4.16 kV, de la fase a a tierra, cuando el transformador está sin carga. Los voltajes del lado de alta del transformador permanecen equilibrados y a su valor nominal durante el cortocircuito.

Calcular las corrientes que circulan durante el cortocircuito en el lado de baja tensión y en el de alta tensión.

SOLUCIÓN

Los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero, en por unidad, del transformador son como se muestran en la figura 3.33. Las impedancias de circuito abierto se consideraron infinitas y las resistencias de cortocircuito despreciables.

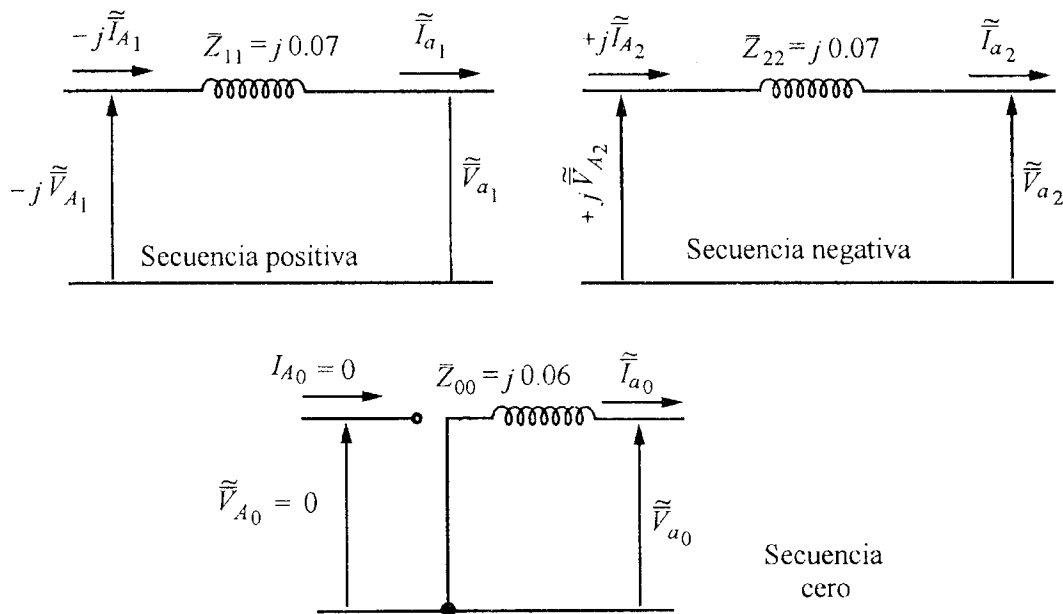


FIGURA 3.33 Circuitos equivalentes, en por unidad, de secuencia positiva, negativa y cero del transformador del ejemplo 3.2

Para representar las condiciones de la falla monofásica a tierra, los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero deben conectarse como se indica en la figura 3.34. Como los voltajes aplicados al lado de alta del transformador permanecen equilibrados durante la falla, sólo aparece una fuente de voltaje en el circuito de secuencia positiva.

Para la representación en por unidad se usan como base de potencia trifásica y como bases de voltaje entre líneas a uno y otro lado del transformador los valores nominales del transformador.

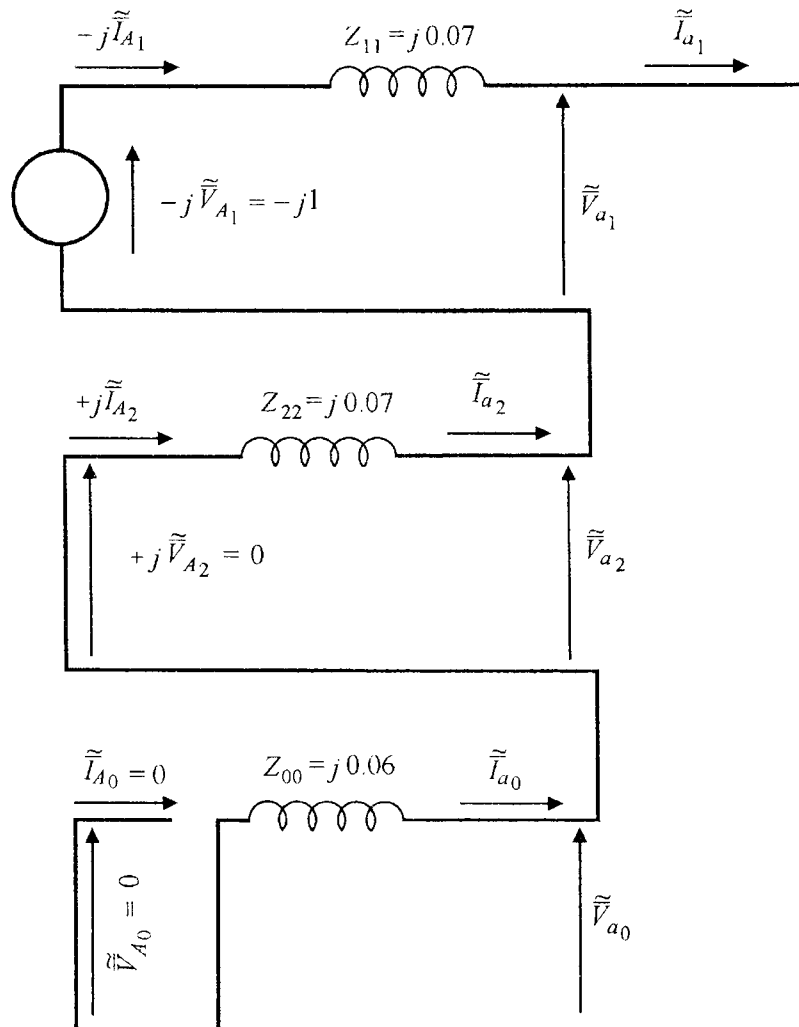


FIGURA 3.34 Conexión de los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero para representar las condiciones de la falla monofásica a tierra

$$\tilde{\tilde{V}}_{A_1} = \frac{\tilde{\tilde{V}}_{A_1}}{V_{B_{1_n}}} = \frac{(34.4/\sqrt{3}) \angle 0^\circ}{(34.4/\sqrt{3})} = 1 \angle 0^\circ \quad -j\tilde{\tilde{V}}_{A_1} = 1 \angle -90^\circ$$

$$\widetilde{I}_{a_1} = \widetilde{I}_{a_2} = \widetilde{I}_{a_0} = \frac{-j1}{j(0.07 + 0.07 + 0.06)} = -\frac{1}{0.2} = -5$$

$$-j\widetilde{I}_{A_1} = +j\widetilde{I}_{A_2} = \widetilde{I}_{a_1} = -5$$

$$\widetilde{I}_{A_1} = -j5$$

$$\widetilde{I}_{A_2} = j5$$

$$\widetilde{I}_{A_0} = 0$$

Cálculo de las corrientes del lado de baja

$$\widetilde{I}_a = \widetilde{I}_{a_1} + \widetilde{I}_{a_2} + \widetilde{I}_{a_0} = 3\widetilde{I}_{a_1} = -15$$

$$\widetilde{I}_b = a^2\widetilde{I}_{a_1} + a\widetilde{I}_{a_2} + \widetilde{I}_{a_0} = 0$$

$$\widetilde{I}_c = a\widetilde{I}_{a_1} + a^2\widetilde{I}_{a_2} + \widetilde{I}_{a_0} = 0$$

$$\widetilde{I}_{B_2} = \frac{1\,500}{4.16\sqrt{3}} = 208\text{ A}$$

$$\widetilde{I}_a = -15 \times 208 = -3\,120\text{ A}$$

Cálculo de las corrientes del lado de alta

$$\widetilde{I}_A = \widetilde{I}_{A_1} + \widetilde{I}_{A_2} + \widetilde{I}_{A_0} = -j5 + j5 + 0 = 0$$

$$\widetilde{I}_B = a^2\widetilde{I}_{A_1} + a\widetilde{I}_{A_2} + \widetilde{I}_{A_0} = j5(a - a^2) = j5(j\sqrt{3}) = -8.66$$

$$\widetilde{I}_C = a\widetilde{I}_{A_1} + a^2\widetilde{I}_{A_2} + \widetilde{I}_{A_0} = j5(a^2 - a) = j5(-j\sqrt{3}) = 8.66$$

$$\tilde{I}_{B_1} = \frac{1\,500}{34.4\sqrt{3}} = 25.2\text{ A}$$

$$\tilde{I}_B = -8.66 \times 25.2 = -218\text{ A}$$

$$\tilde{I}_C = 8.66 \times 25.2 = 218\text{ A}$$

En la figura 3.35 se muestran las corrientes que circulan del lado de baja y del lado de alta del transformador durante la falla monofásica a tierra.

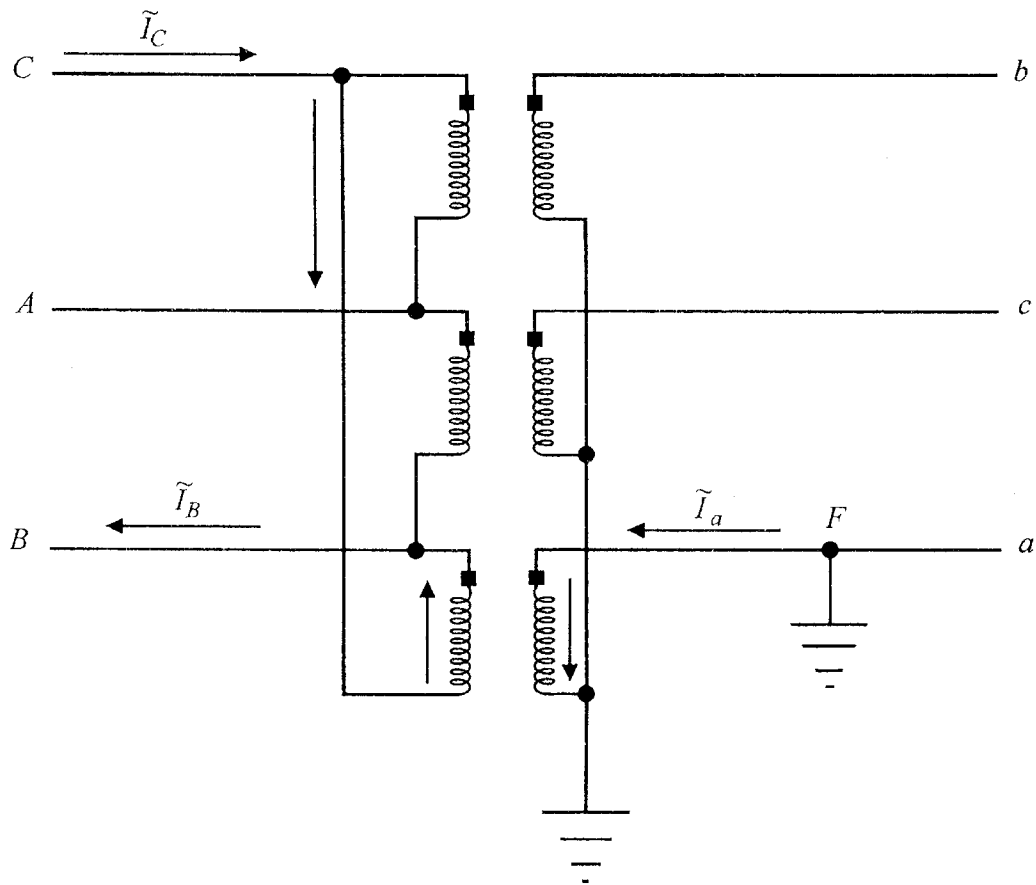
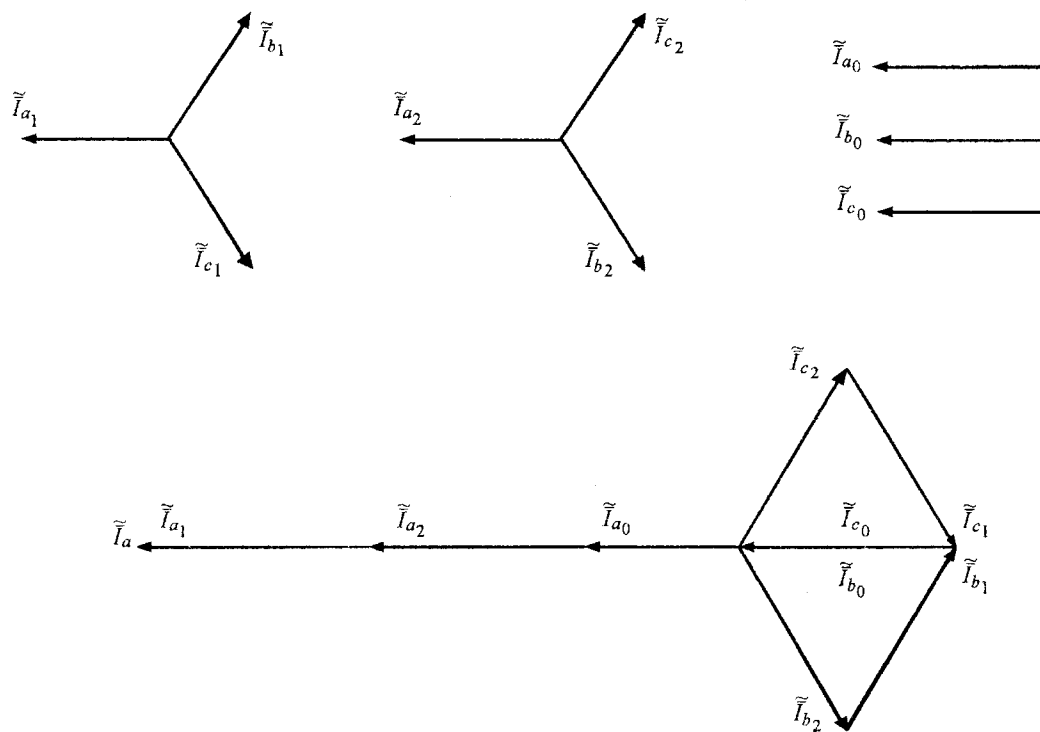
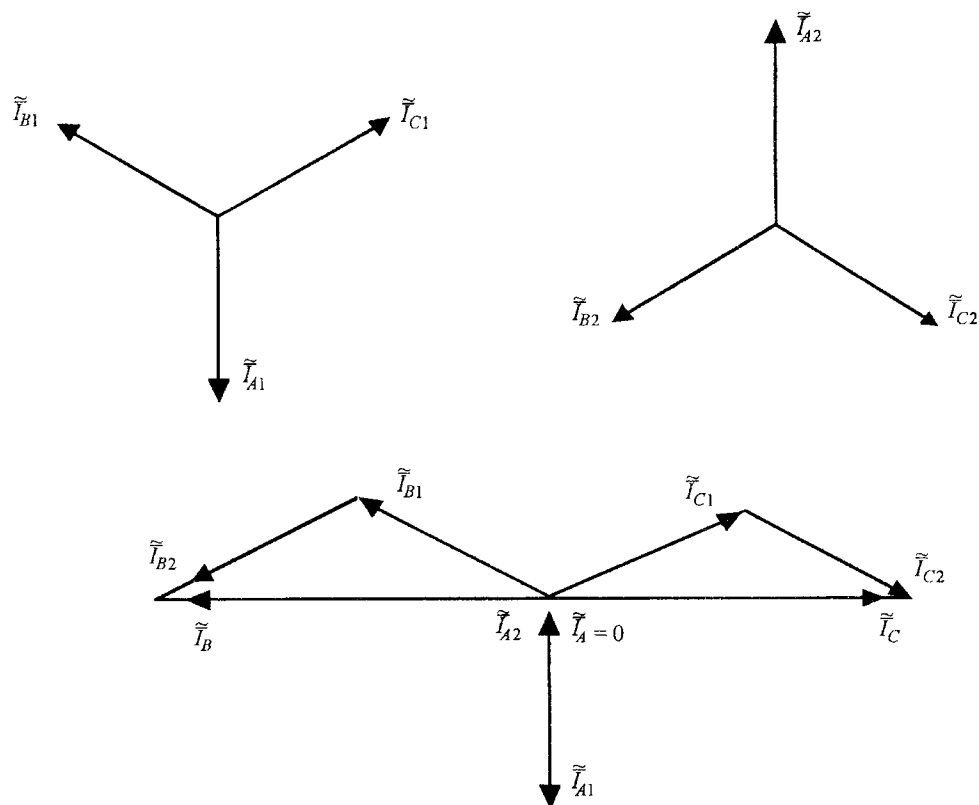


FIGURA 3.35 Corrientes que circulan del lado de baja y de alta del transformador durante la falla monofásica a tierra

En la figura 3.36 se muestran los diagramas fasoriales de las tres secuencia de las corrientes de cada lado del transformador y su combinación para dar las corrientes de línea.



a) Diagramas fasoriales de las corrientes de lado de baja



b) Diagramas fasoriales de las corrientes del lado de alta

FIGURA 3.36 Diagramas fasoriales de las tres secuencias de las corrientes de cada lado del transformador y su combinación para dar las corrientes de línea

3.5 Circuitos equivalentes de secuencia cero de transformadores de tres devanados

El circuito equivalente de secuencia cero de un transformador trifásico de tres devanados depende de la forma de conectar los devanados y puede deducirse directamente de los circuitos equivalentes de secuencia cero de los transformadores trifásicos de dos devanados.

En las figuras 3.37 y 3.38 se muestran los circuitos equivalentes de secuencia cero para las distintas combinaciones de conexiones trifásicas que pueden presentarse.

Si el neutro de alguna de las estrellas está aislado de tierra, la Z_n correspondiente es infinita y en el circuito equivalente queda representada por un circuito abierto.

Como se demostró anteriormente al deducir el circuito equivalente de secuencia positiva del transformador de tres devandos:

$$Z_1 = 1/2(Z_{1-2} + Z_{1-3} - Z_{2-3})$$

$$Z_2 = 1/2(Z_{1-2} + Z_{2-3} - Z_{1-3})$$

$$Z_3 = 1/2(Z_{1-3} + Z_{2-3} - Z_{1-2})$$

donde Z_{1-2} , Z_{1-3} y Z_{2-3} son las impedancias de cortocircuito de los devanados tomados de dos en dos.

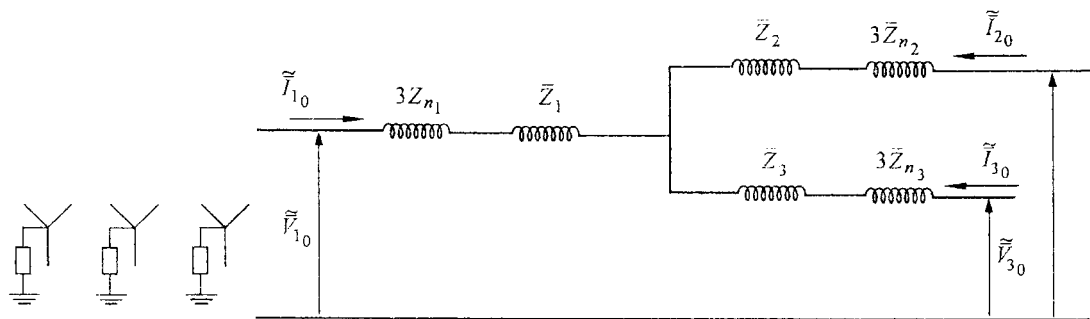
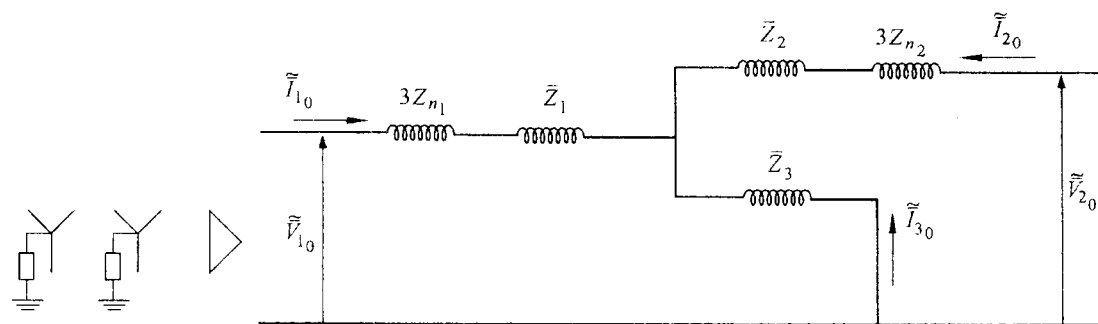
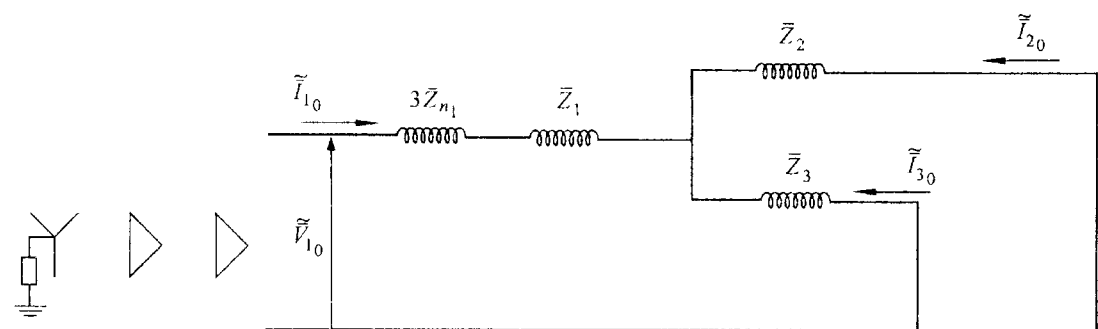


FIGURA 3.37 a) Conexión estrella-estrella-estrella con los tres neutros conectados a tierra a través de impedancias

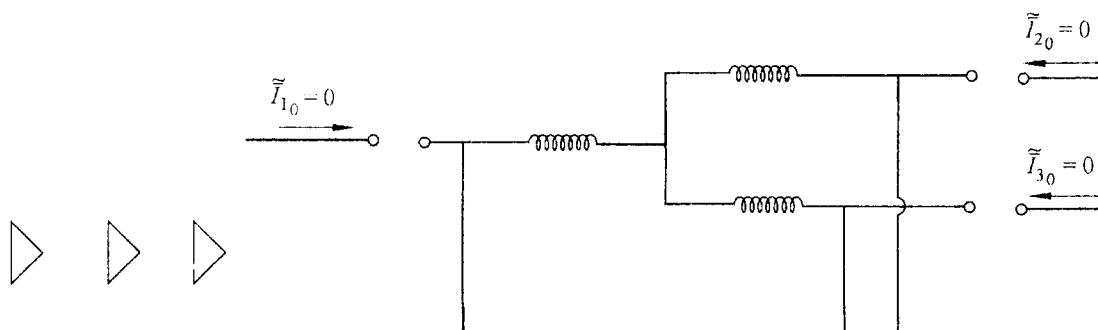


b) Conexión estrella-estrella-delta, con los dos neutros conectados a tierra a través de impedancias

FIGURA 3.37 Circuitos equivalentes de secuencia cero de transformadores de tres devanados. Casos a y b



c) Conexión estrella-delta-delta con el neutro conectado a tierra a través de una impedancia



d) Conexión delta-delta-delta

FIGURA 3.38 Circuitos equivalentes de secuencia cero de transformadores de tres devanados. Casos c y d

3.6 Bancos a tierra

En los circuitos trifásicos con neutro aislado de tierra se puede obtener un neutro para conectarlo a tierra mediante un transformador trifásico conectado en estrella con neutro a tierra-delta o en zig-zag con neutro a tierra. Cuando estos transformadores se usan únicamente para este fin, reciben el nombre de bancos de tierra. Tienen por objeto hacer posible el empleo de protecciones automáticas contra fallas a tierra y contribuyen a disminuir los sobrevoltajes durante fallas a tierra del sistema al que están conectados.

En el caso de los bancos a tierra conectados en estrella con neutro a tierra-delta, el primario va conectado a la línea y el secundario en delta no tiene ninguna carga conectada y sus terminales no necesitan sacarse del tanque del transformador. La capacidad de este tipo de transformadores puede basarse en la corriente de cortocircuito que puede circular por él durante una falla a tierra del sistema al que está conectado. Esta corriente de tierra es de corta duración, ya que la protección automática debe desconectar la falla en menos de sesenta segundos.

3.6.1 Circuito equivalente de secuencia positiva y negativa de bancos a tierra conectados en zig-zag

En la figura 3.39 se muestra esquemáticamente un banco a tierra conectado en zig-zag y el diagrama fasorial correspondiente.

La relación de vueltas de los devanados enrollados sobre el mismo núcleo magnético es, generalmente, de 1:1.

Cada par de devanados enrollados sobre el mismo núcleo magnético constituyen un transformador monofásico, que puede representarse mediante el circuito equivalente de la figura 3.40.

Por tanto, pueden escribirse las siguientes ecuaciones expresando todas las cantidades en por unidad

$$\tilde{\bar{V}}_{x_1} - \tilde{\bar{V}}_{x_2} = \bar{Z}_{cc} \tilde{\bar{I}}_a \quad (3.8)$$

$$\tilde{\bar{V}}_{y_1} - \tilde{\bar{V}}_{y_2} = \bar{Z}_{cc} \tilde{\bar{I}}_b \quad (3.9)$$

$$\tilde{\bar{V}}_{z_1} - \tilde{\bar{V}}_{z_2} = \bar{Z}_{cc} \tilde{\bar{I}}_c \quad (3.10)$$

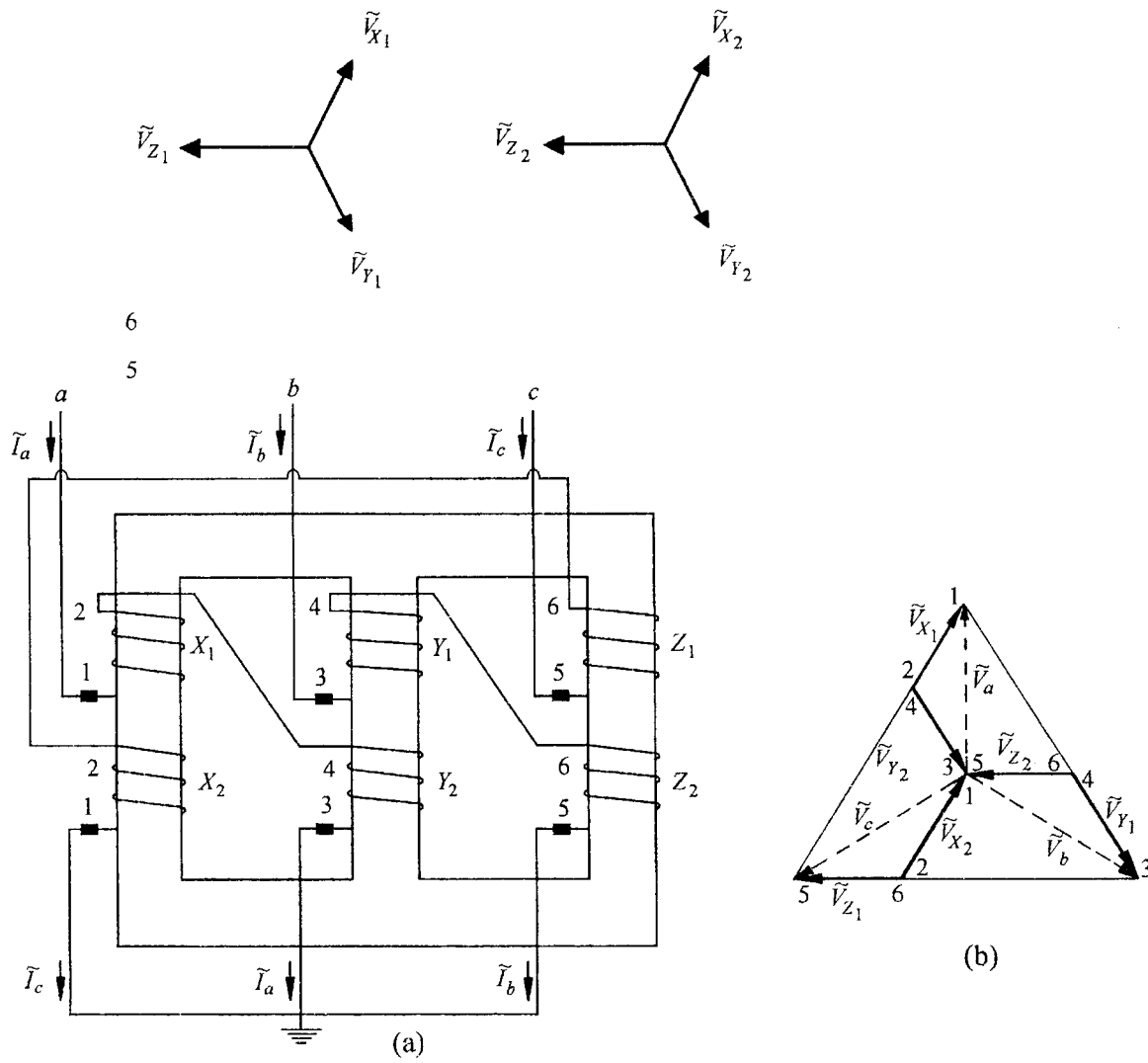


FIGURA 3.39 Conexiones y diagrama fasorial de un transformador conectado en zig-zag

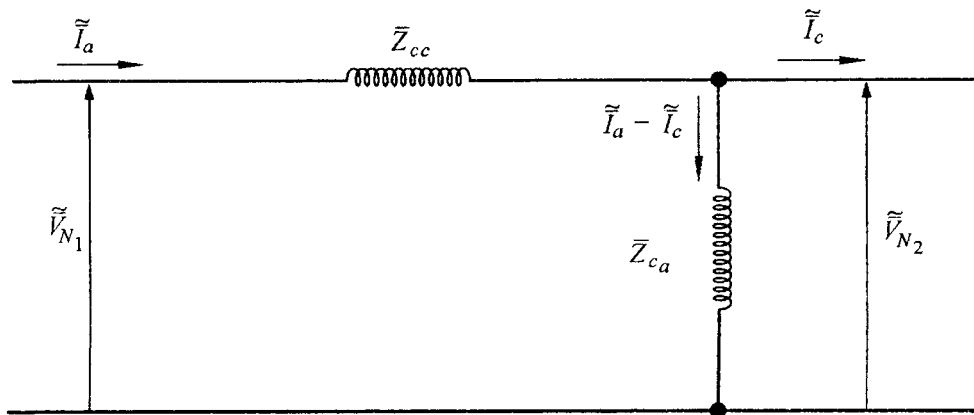


FIGURA 3.40 Circuito equivalente de un par de devanados enrollados sobre el mismo núcleo magnético

En el circuito equivalente de la figura 3.40 y en los otros dos circuitos equivalentes que corresponden a los otros dos pares de devanados, se verifica que

$$\widetilde{\bar{V}}_{x_2} = \bar{Z}_{ca}(\widetilde{\bar{I}}_a - \widetilde{\bar{I}}_c) \quad (3.11)$$

$$\widetilde{\bar{V}}_{y_2} = \bar{Z}_{ca}(\widetilde{\bar{I}}_b - \widetilde{\bar{I}}_a) \quad (3.12)$$

$$\widetilde{\bar{V}}_{z_2} = \bar{Z}_{ca}(\widetilde{\bar{I}}_c - \widetilde{\bar{I}}_b) \quad (3.13)$$

Como puede verse en la figura 3.39b, los voltajes al neutro están dados por

$$\widetilde{\bar{V}}_a = \widetilde{\bar{V}}_{x_1} - \widetilde{\bar{V}}_{y_2} \quad (3.14)$$

$$\widetilde{\bar{V}}_b = \widetilde{\bar{V}}_{y_1} - \widetilde{\bar{V}}_{z_2} \quad (3.15)$$

$$\widetilde{\bar{V}}_c = \widetilde{\bar{V}}_{z_1} - \widetilde{\bar{V}}_{x_2} \quad (3.16)$$

Sustituyendo en la ecuación 3.8 la ecuación 3.11

$$\widetilde{\bar{V}}_{x_1} = \bar{Z}_{cc}\widetilde{\bar{I}}_a + \bar{Z}_{ca}(\widetilde{\bar{I}}_a - \widetilde{\bar{I}}_c) \quad (3.17)$$

Sustituyendo en la ecuación 3.14 las ecuaciones 3.17 y 3.12

$$\widetilde{\bar{V}}_a = \bar{Z}_{cc}\widetilde{\bar{I}}_a + \bar{Z}_{ca}(\widetilde{\bar{I}}_a - \widetilde{\bar{I}}_c) - \bar{Z}_{ca}(\widetilde{\bar{I}}_b - \widetilde{\bar{I}}_a)$$

$$\widetilde{\bar{V}}_a = \bar{Z}_{cc}\widetilde{\bar{I}}_a + \bar{Z}_{ca}(2\widetilde{\bar{I}}_a - \widetilde{\bar{I}}_b - \widetilde{\bar{I}}_c)$$

y como en un sistema trifásico equilibrado

$$-\tilde{I}_b - \tilde{I}_c = \tilde{I}_a$$

resulta finalmente

$$\tilde{V}_a = \bar{Z}_{cc} \tilde{I}_a + 3\bar{Z}_{ca} \tilde{I}_a \quad (3.18)$$

La ecuación 3.18 puede representarse mediante el circuito equivalente de la figura 3.41, que es el circuito equivalente de secuencia positiva o negativa de un banco a tierra en zig-zag.

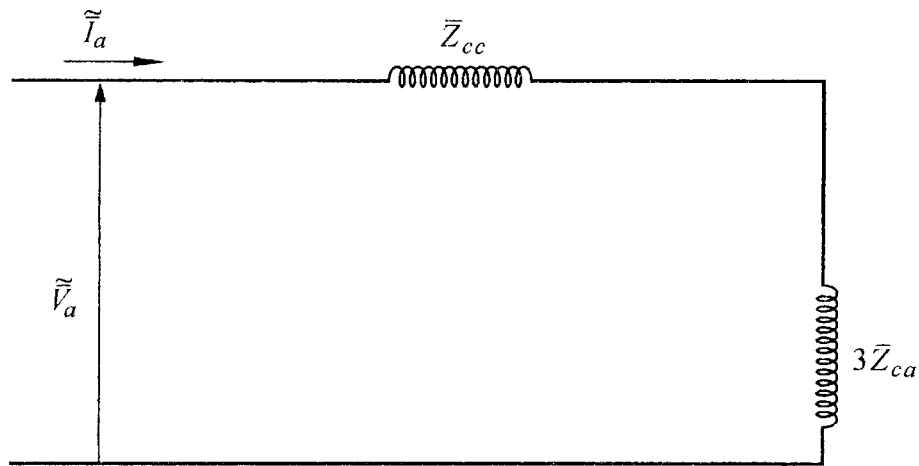


FIGURA 3.41 Circuito equivalente de secuencia positiva o de secuencia negativa de un banco a tierra en zig-zag

La impedancia Z_{ca} tiene un valor muy elevado, de manera que la conexión en zig-zag con neutro a tierra ofrece una impedancia muy alta a la circulación de corriente de secuencia positiva o negativa.

3.6.2 Circuito equivalente de secuencia cero de bancos a tierra conectados en zig-zag

Si las tres corrientes que circulan por los devanados del transformador en zig-zag son de la misma magnitud y están en fase

$$\tilde{\tilde{I}}_{a0} = \tilde{\tilde{I}}_{b0} = \tilde{\tilde{I}}_{c0}$$

Se verificará, de acuerdo con las ecuaciones 3.11, 3.12 y 3.13, que

$$\tilde{\tilde{V}}_{x_2} = 0$$

$$\tilde{\tilde{V}}_{y_2} = 0$$

$$\tilde{\tilde{V}}_{z_2} = 0$$

y, por tanto, la ecuación 3.8 se reduce a

$$\tilde{\tilde{V}}_{x_1} = \bar{Z}_{cc} \tilde{\tilde{I}}_{a0}$$

y la ecuación 3.14 se reduce a

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{V}}_{a0} &= \tilde{\tilde{V}}_{x_1} \\ \tilde{\tilde{V}}_{a0} &= \bar{Z}_{cc} \tilde{\tilde{I}}_{a0} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Es decir, el circuito equivalente de secuencia cero de un banco a tierra conectado en zig-zag queda como se muestra en la figura 3.42. Puede verse que la conexión en zig-zag con neutro directamente a tierra ofrece una baja impedancia a la circulación de corrientes de secuencia cero.

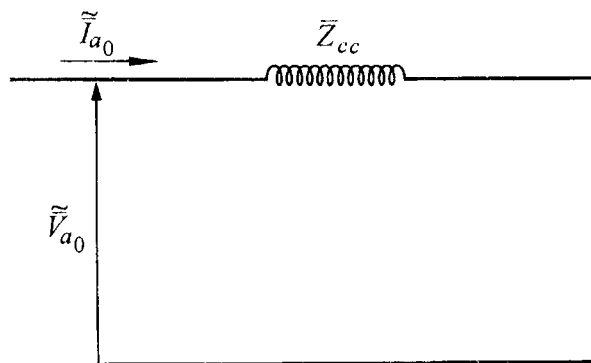


FIGURA 3.42 Circuito equivalente de secuencia cero de un banco a tierra en zig-zag

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE CORTOCIRCUITOS EN LAS TERMINALES DE UN GENERADOR SÍNCRONO

4.1 Descripción de los generadores síncronos

Los generadores síncronos usados en las plantas generadoras de un sistema eléctrico constan de un rotor que contiene una serie de bobinas (el campo o inductor) recorridas por una corriente continua, la cual produce un flujo constante que gira con el rotor, y de un estator o armadura de acero laminado con tres embobinados, en los que se inducen tres fuerzas electromotrices alternas de igual magnitud y desplazadas 120° eléctricos.

Al conectar una carga trifásica equilibrada al generador circulan por los embobinados del estator tres corrientes alternas que constituyen un sistema trifásico equilibrado. Las fuerzas magnetomotrices producidas por estas tres corrientes dan lugar a una fuerza magnetomotriz resultante que, en las condiciones normales de funcionamiento, o sea cuando la máquina gira a la velocidad de sincronismo, producen un flujo (la reacción de armadura) que gira a la misma velocidad y en el mismo sentido que el rotor y que se combina con el flujo producido por el campo para dar el flujo resultante en el entrehierro.

Los generadores movidos por turbinas de vapor o de gas tienen generalmente un par de polos y giran a gran velocidad: 3 000 revoluciones por minuto para 50 Hz y 3 600 para 60 Hz. El rotor es una pieza cilíndrica de acero con polos lisos.

Los generadores muy grandes de plantas nucleoelectricas, con capacidades de generación del orden de 1 000 MW, tienen dos pares de polos y, a la velocidad de sincronismo, efectúan 1500 revoluciones por minuto a 50 Hz y 1 800 a 60 Hz. En este caso también el rotor es de polos lisos.

Los generadores movidos por turbinas hidráulicas tienen un número elevado de pares de polos y giran, en consecuencia, más lentamente. En este caso el rotor se construye con polos salientes

de acero laminado; además de las bobinas que constituyen el campo existen bobinas conectadas en cortocircuito, llamadas amortiguadores y que tienen por objeto principal amortiguar las oscilaciones del rotor y facilitar la sincronización de la máquina.

En los generadores de polos lisos el rotor, que no está laminado, juega el mismo papel que los amortiguadores.

4.2 Cortocircuito trifásico en las terminales de un generador síncrono operando en vacío

Si se establece súbitamente un cortocircuito trifásico en las terminales de un generador que está operando en vacío y se registran los oscilogramas de las corrientes en las tres fases y en el campo, se obtendrán unas curvas como las mostradas en la figura 4.1.

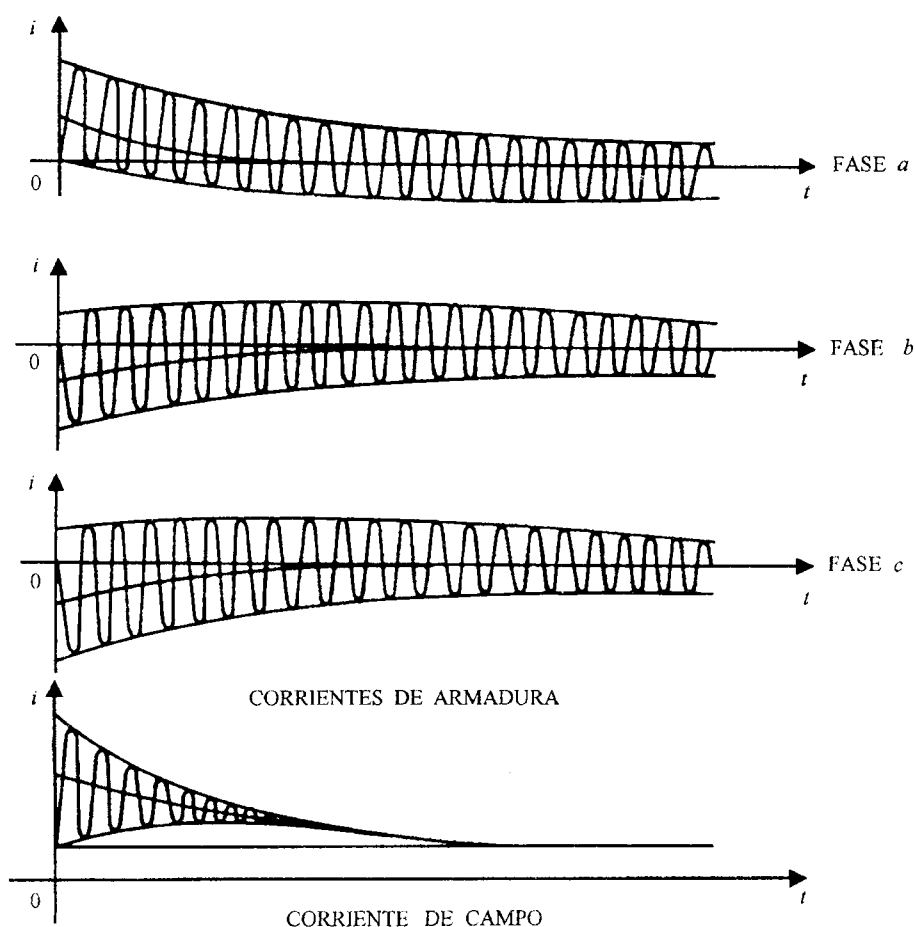


FIGURA 4.1 Oscilogramas de las corrientes producidas por un cortocircuito trifásico aplicado a las terminales de un generador que funciona en vacío

En la figura 4.2a se muestra con más detalle el oscilograma de la corriente en una de las fases.

Las líneas AA' y BB' son las envolventes de la corriente alterna y MM' es la línea mediana entre las envolventes.

La corriente de la figura 4.2a puede descomponerse en dos componentes:

- Una corriente continua amortiguada cuya magnitud en función del tiempo está representada por la línea MM' , véase la figura 4.2b.
- Una corriente alterna simétrica de frecuencia fundamental, que se obtiene restando de la corriente total la componente de corriente continua, véase la figura 4.2c.

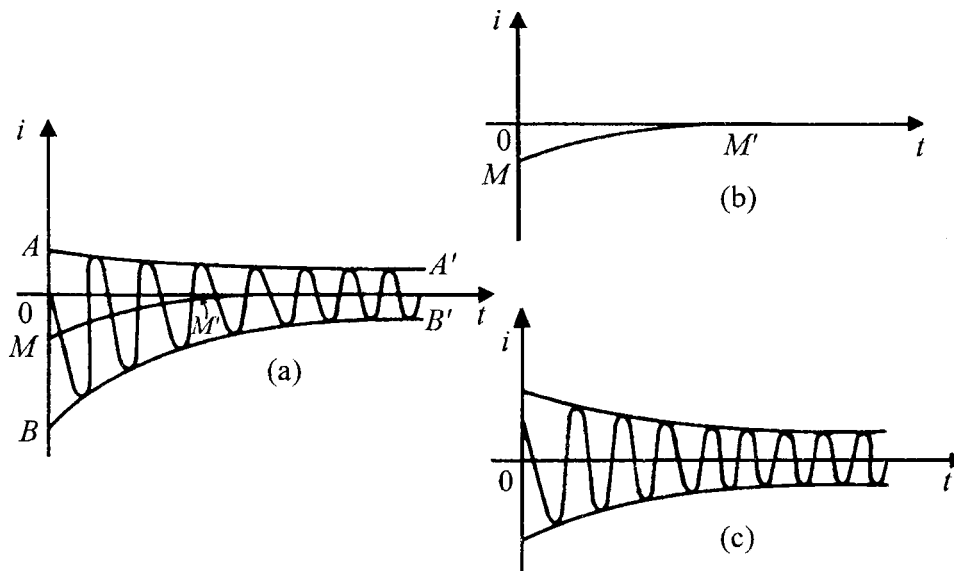


FIGURA 4.2 Descomposición de la corriente de cortocircuito

4.2.1 Componente de corriente continua

Para explicar la aparición de una componente de corriente continua en la corriente de cortocircuito considérese el circuito equivalente de la figura 4.3, que representa una fase de un generador síncrono trifásico. R y L son, respectivamente, la resistencia y la inductancia por fase del generador.

Inicialmente el generador está funcionando en vacío (sin carga conectada): la fuerza electromotriz inducida es una función armónica del tiempo con un valor de cresta E .

En el instante $t = 0$ se produce un cortocircuito trifásico en las terminales del generador representado en el circuito equivalente de la figura 4.3 por el cierre del contacto S .

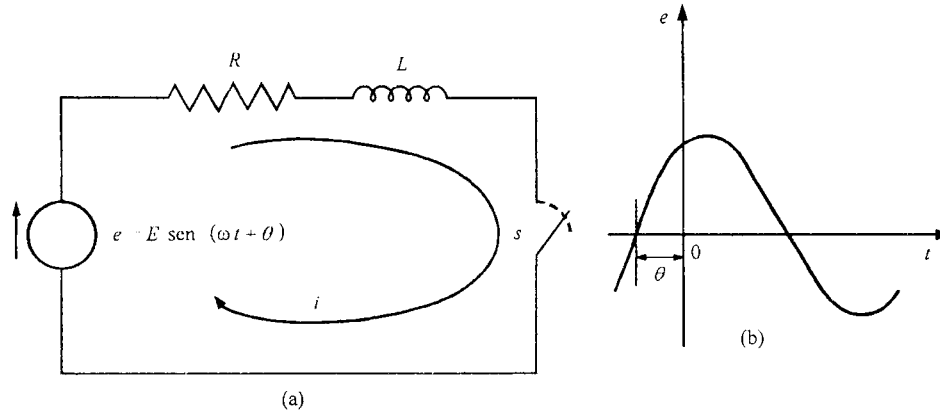


FIGURA 4.3 Circuito inductivo excitado por una fuerza electromotriz sinusoidal

La ecuación diferencial que describe las condiciones del circuito al establecerse el cortocircuito es

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E \sin(\omega t + \theta) \quad (4.1)$$

La solución de esta ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes es

$$i = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} [\sin(\omega t + \theta - \phi) - \sin(\theta - \phi) e^{-(R/L)t}] \quad (4.2)$$

donde
$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

La ecuación anterior muestra que la expresión de la corriente i consta de dos términos.

1. El término

$$- \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\theta - \phi) e^{-(R/L)t} \quad (4.3)$$

que es una corriente continua amortiguada que decae con la constante de tiempo

$$\frac{L}{R}$$

2. El término

$$\frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(t + \theta - \phi) \quad (4.4)$$

que es una corriente alterna simétrica de frecuencia $f = \omega/2\pi$ ciclos por segundo.

Para $t = 0$ los dos términos son de igual magnitud pero de signo contrario, de manera que el valor correspondiente de la corriente total i es igual a cero.

En un generador síncrono la reactancia inductiva ωL es mucho mayor que la resistencia R y por tanto puede considerarse que

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} = 90^\circ$$

Si el cortocircuito se establece en el instante en que $\theta = 90^\circ$, o sea cuando la fuerza electromotriz tiene su valor máximo, se tendrá

$$\sin(90^\circ - 90^\circ) = 0$$

y por tanto no existirá en este caso componente de corriente continua.

Si el cortocircuito se establece en el instante en que $\theta = 0$, o sea cuando la fuerza electromotriz pasa por cero, se tendrá

$$\sin(0 - 90^\circ) = -1$$

y la componente de corriente continua alcanzará su valor inicial máximo, que es

$$\frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Las dos condiciones extremas antes citadas pueden explicarse desde un punto de vista físico, como se expone a continuación.

En un circuito inductivo la corriente está atrasada 90° con respecto a la fuerza electromotriz aplicada. Si el circuito se cierra cuando la fuerza electromotriz pasa por su valor máximo, la corriente se inicia con un desfaseamiento de 90° con respecto al voltaje y no existe componente de corriente continua. Si el circuito se cierra cuando la fuerza electromotriz pasa por cero, la corriente no puede alcanzar su valor de cresta instantáneamente y existe un estado transitorio entre el instante inicial, en el que la fuerza electromotriz y la corriente son simultáneamente iguales a cero y la condición de régimen permanente en que la corriente está atrasada 90° con respecto a la fuerza electromotriz; en este caso aparece una componente de corriente continua cuyo valor inicial es de igual magnitud que el valor inicial de cresta de la corriente alterna simétrica, pero de signo contrario.

Esta corriente continua que circula en los devanados del estator induce una corriente alterna en el rotor, como se muestra en el oscilograma de la corriente de campo de la figura 4.1.

4.2.2 Componente de corriente alterna simétrica

En la figura 4.4 se muestra la componente de corriente alterna simétrica correspondiente a una de las fases de un generador en el que se ha producido un cortocircuito trifásico.

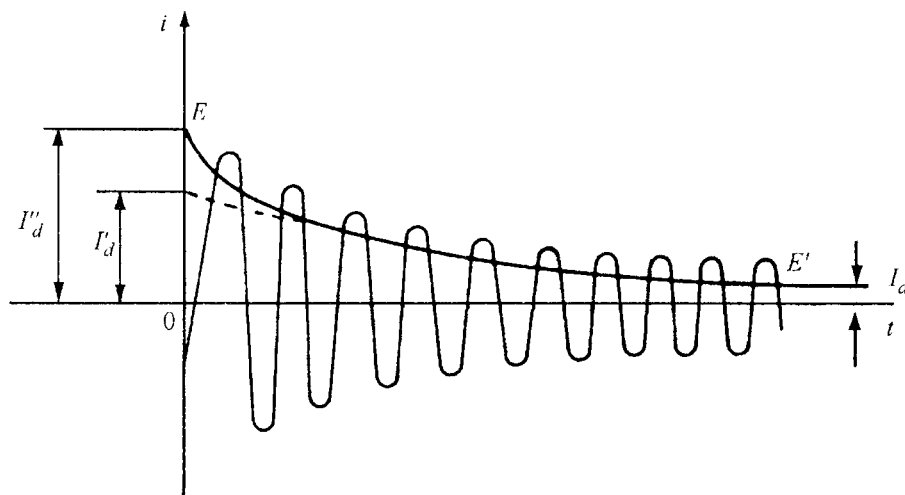


FIGURA 4.4 Componente de corriente alterna simétrica

La línea EE' representa el valor eficaz de la corriente en función del tiempo y está dada por la expresión

$$\sqrt{1/T \int_0^T i^2 dt}$$

donde i es el valor instantáneo de la corriente y T es el periodo de la corriente alterna.

La amplitud de esta corriente alterna decae muy rápidamente en los primeros ciclos y después más lentamente hasta alcanzar el valor de la corriente de cortocircuito de régimen permanente.

La disminución de la amplitud de la corriente alterna se debe al efecto del flujo producido por las corrientes que circulan en los amortiguadores y por la variación de la reacción de armadura. Las corrientes en los amortiguadores decaen muy rápidamente y su efecto se hace sentir únicamente en los primeros ciclos. La reacción de armadura pasa de un valor cero, correspondiente a la operación en vacío del generador a un valor desmagnetizante máximo cuando el generador alcanza el régimen de cortocircuito permanente; en efecto, para el caso de un generador en régimen permanente alimentando un circuito inductivo con factor de potencia prácticamente igual a cero, la reacción de armadura está en oposición a la excitación del campo.

En la teoría de la máquina síncrona, el efecto combinado de la reacción de armadura y de la inductancia interna del generador puede tomarse en cuenta mediante una reactancia ficticia. Esta reactancia varía durante el cortocircuito; se definen tres valores:

- a) La reactancia subtransitoria X_d'' , correspondiente a las condiciones existentes en el generador al iniciarse el cortocircuito y que está ligada a la existencia de corrientes en los amortiguadores. Es la reactancia que debe considerarse durante los primeros ciclos del cortocircuito.
- b) La reactancia transitoria X_d' , que es la reactancia correspondiente a las condiciones existentes en el generador al iniciarse el cortocircuito, pero despreciando el efecto de las corrientes de los amortiguadores. Esta reactancia representa las condiciones de la máquina después de los primeros ciclos del cortocircuito hasta más o menos medio segundo a partir del inicio del cortocircuito.
- c) La reactancia síncrona X_d , que corresponde a las condiciones de régimen permanente del generador.

Para el intervalo de tiempo que es de interés en el estudio de los cortocircuitos, puede considerarse que la velocidad del generador permanece constante. Por otra parte, como los eslabonamientos del flujo del campo no pueden cambiar instantáneamente, la fuerza electromotriz

inducida en cada fase del estator inmediatamente después de producirse el cortocircuito es igual a la que existía inmediatamente antes del cortocircuito.

En la figura 4.4 la corriente $\tilde{I}_d''$ es el valor eficaz de la intensidad de corriente inicial de cortocircuito y se llama corriente subtransitoria; está dada por la siguiente expresión:

$$\tilde{I}_d'' = \frac{\tilde{E}_0}{r + jX_d''} \quad (4.5)$$

donde $\tilde{E}_0$ es el valor eficaz de la fuerza electromotriz existente inmediatamente antes de producirse el cortocircuito (que es igual al voltaje terminal en vacío del generador inmediatamente antes del cortocircuito si el cortocircuito ocurre cuando el generador no tiene carga).

La corriente $\tilde{I}_d'$ es el valor eficaz de la intensidad de corriente si no existen amortiguadores o se desprecia su efecto y se llama corriente transitoria.

$$\tilde{I}_d' = \frac{\tilde{E}_0}{r + jX_d'} \quad (4.6)$$

Por último, $\tilde{I}_d$ es el valor eficaz de la intensidad de corriente de cortocircuito de régimen permanente.

Al calcular $\tilde{I}_d$ hay que tener en cuenta que la fuerza electromotriz tendrá ya un valor diferente del que tenía al iniciarse el cortocircuito; este valor dependerá de las características del regulador de voltaje y del excitador.

Desde el punto de vista del cálculo de las corrientes de cortocircuito, la determinación de la corriente de cortocircuito permanente no tiene interés práctico. Con protecciones e interruptores modernos, que interrumpen la corriente de cortocircuito en unos cuantos ciclos, la corriente interrumpida es la corriente subtransitoria o, con protecciones más lentas, la transitoria.

Al utilizar las expresiones 4.5 y 4.6 se está calculando el valor eficaz inicial de la corriente subtransitoria simétrica y de la corriente transitoria simétrica, respectivamente. Para tomar en cuenta el fenómeno de asimetría producido por la posible existencia de una componente de corriente continua, se multiplica la corriente simétrica por un factor mayor que la unidad, cuya magnitud depende del instante en que se quiere determinar la corriente total.

El valor eficaz de la corriente de cortocircuito asimétrica I_a en un instante dado, es igual a

$$I_{as} = \sqrt{I_{cc}^2 + I_s^2} \quad (4.7)$$

donde I_{cc} es el valor de la componente de corriente continua e I_s el valor eficaz de la corriente alterna simétrica, en el instante considerado.

Para el caso en que el cortocircuito se produce en el instante en que la fuerza electromotriz pasa por cero, que es en el que se tiene máxima asimetría, el valor inicial de la componente de corriente continua es de igual magnitud y de signo contrario que el valor de cresta de la corriente subtransitoria simétrica, como se muestra en la figura 4.5.

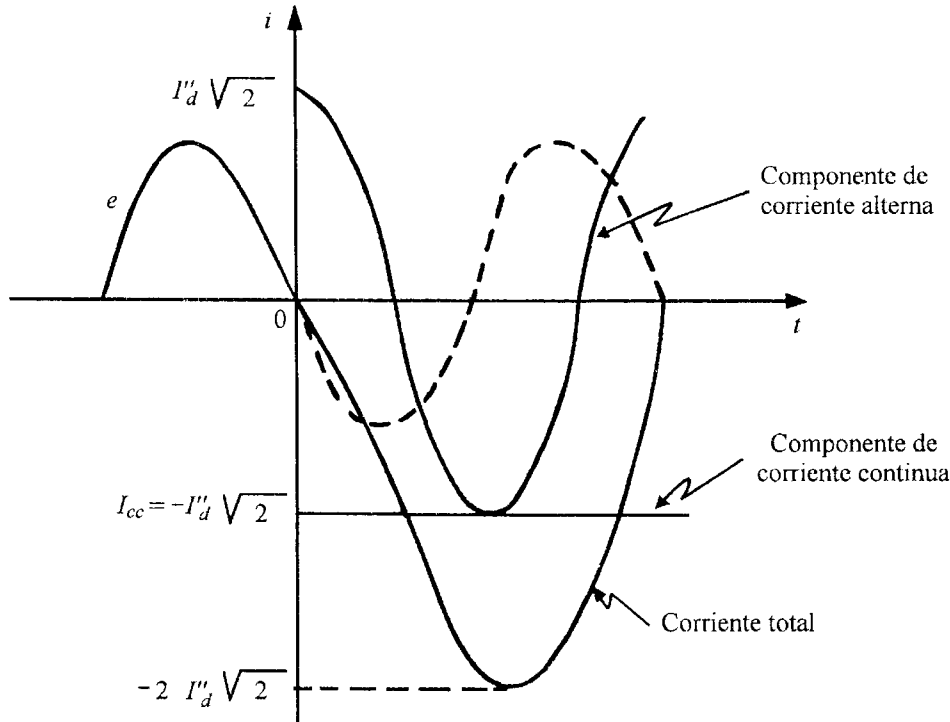


FIGURA 4.5 Valor inicial de las componentes de corriente continua y de corriente alterna simétrica, para el caso de la máxima asimetría

Si se desprecia el amortiguamiento tanto de la componente de corriente continua como de la componente de corriente alterna durante el primer ciclo, se tiene que el valor eficaz de la corriente total de cortocircuito es igual a

$$I_{as} = \sqrt{I_{cc}^2 + I''_d^2} \quad (4.8)$$

$$I_{as} = \sqrt{(-I''_d \sqrt{2})^2 + I''_d^2} = I''_d \sqrt{3}$$

EJEMPLO 4.1

Un generador síncrono, con capacidad trifásica de 50 000 kVA a $FP = 0.8$ y voltaje nominal entre líneas de 13.8 kV, funciona inicialmente en vacío con un voltaje terminal de 13.8 kV.

Las impedancias del generador, referidas a la capacidad y voltaje nominales, son las siguientes:

Reactancia síncrona $\bar{X}_d = j1.0$

Reactancia transitoria $\bar{X}'_d = j0.15$

Reactancia subtransitoria $\bar{X}''_d = j0.10$

Resistencia despreciable

Para el caso de una falla trifásica en las terminales del generador, que se produzca en el instante en que el voltaje terminal del generador pasa por cero después de haber tenido valores negativos, calcular:

1. El valor eficaz inicial de la componente de frecuencia fundamental de la corriente de cortocircuito en p.u. y en amperes.
2. El valor máximo inicial de la componente de corriente continua de la corriente de cortocircuito en amperes.
3. El valor eficaz de la corriente total de cortocircuito suponiendo que no hay amortiguamiento de las componentes de corriente continua y de corriente alterna, en amperes.
4. El valor instantáneo máximo de la corriente total de cortocircuito para las condiciones del punto anterior, en amperes.
5. Hacer un dibujo mostrando la gráfica de los valores instantáneos de las componentes de corriente alterna y de corriente continua de cortocircuito y la corriente total, durante el primer ciclo después de ocurrido el cortocircuito, suponiendo que no hay amortiguamiento de las componentes de corriente continua y de corriente alterna.

SOLUCIÓN

1. Valor eficaz inicial

$$\tilde{I}''_d = \frac{\tilde{E}}{jX''_d} = \frac{1}{j0.10} = -j10$$

$$I_B = \frac{50\,000}{13.8\sqrt{3}} = 2\,091.85 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_d'' = -j10 \times 2\,091.85 = -j20\,918.5 \text{ A}$$

2. Valor máximo inicial de la componente de corriente continua

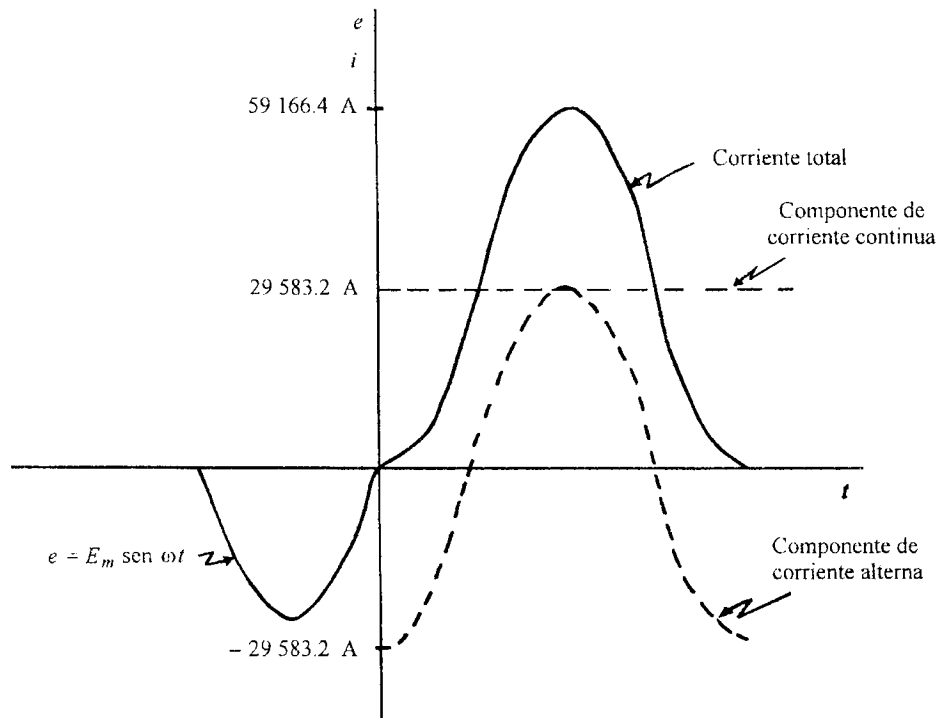
$$I_c = -I_d''\sqrt{2} = 20\,918.5\sqrt{2} = 29\,583.2 \text{ A}$$

3. Valor eficaz de la corriente total

$$\begin{aligned} I_{as}^2 &= \sqrt{I_c^2 + I_d''^2} = \sqrt{(-I_d''\sqrt{2})^2 + (I_d'')^2} = I_d''\sqrt{3} \\ &= 20\,918.5\sqrt{3} = 36\,231.9 \text{ A} \end{aligned}$$

4. Valor instantáneo máximo de la corriente total

$$I_{m\acute{a}x} = -2\sqrt{2}I_d'' = -2\sqrt{2}(-20\,918.5) = 59\,166.4 \text{ A}$$



4.3 Cortocircuito trifásico en las terminales de un generador síncrono operando con carga conectada

Para los efectos del cálculo del valor eficaz de la componente de corriente alterna simétrica de las corrientes de cortocircuito trifásico, un generador síncrono puede representarse con bastante aproximación por el circuito equivalente, en por unidad, mostrado en la figura 4.6a si se trata de calcular la corriente transitoria; y por el circuito equivalente de la figura 4.6b si se trata de calcular la corriente subtransitoria.

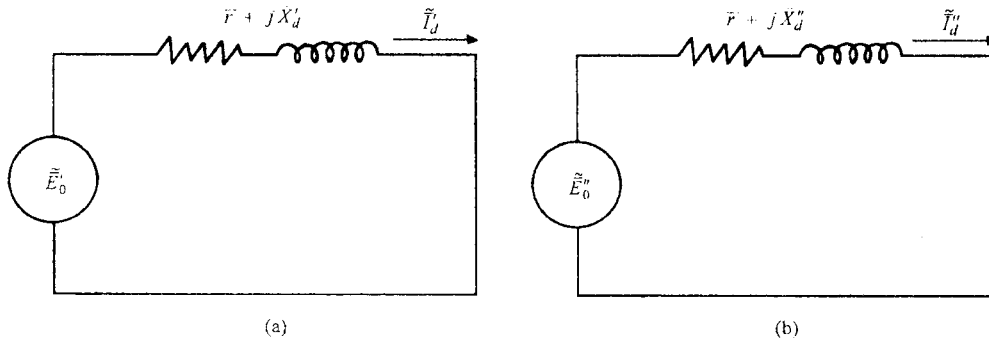


FIGURA 4.6 Circuitos equivalentes en por unidad de un generador síncrono para el cálculo de las corrientes de cortocircuito transitoria y subtransitoria

En el circuito equivalente de la figura 4.6a el voltaje $\tilde{E}'_0$ es el correspondiente a los eslabonamientos de flujo del campo existentes inmediatamente antes de producirse el cortocircuito. Como estos eslabonamientos de flujo no pueden cambiar instantáneamente, el valor de E'_0 se mantiene prácticamente constante durante varios ciclos después de producido el cortocircuito. En este caso, que corresponde al cálculo de la corriente transitoria I'_d , no se toma en cuenta el efecto de los amortiguadores, ya sea porque estos no existen o porque su efecto no es de interés para el caso estudiado.

El circuito de la figura 4.6a permite calcular el valor eficaz, en por unidad, de la componente de corriente alterna simétrica de la corriente transitoria de cortocircuito, la cual está dada por

$$\tilde{I}'_d = \frac{\tilde{E}'_0}{r + j\bar{X}'_d} \quad (4.10)$$

En el circuito equivalente de la figura 4.6b el voltaje E''_0 corresponde a las condiciones que existen inmediatamente después de iniciado el cortocircuito, cuando la reactancia de la máquina síncrona tiene el valor mínimo correspondiente a la reactancia subtransitoria, debido a los eslabonamientos de flujo existentes en ese instante en la máquina, incluyendo el efecto del flujo producido por las corrientes en los amortiguadores, efecto que como ya se dijo es de muy corta duración. El voltaje E''_0 es, por tanto, el que debe usarse para calcular la corriente subtransitoria.

De acuerdo con el circuito equivalente de la figura 4.6b el valor eficaz, en por unidad, de la componente de corriente alterna simétrica de la corriente subtransitoria de cortocircuito está dada por la siguiente expresión:

$$\tilde{I}''_d = \frac{\tilde{E}''_0}{r + j\tilde{X}''_d} \quad (4.11)$$

Si el cortocircuito trifásico ocurre cuando el generador está operando en vacío (sin carga conectada), se verifica que

$$\tilde{E}'_0 = \tilde{E}''_0 = \tilde{V}_{t0}$$

donde $\tilde{E}_{t0}$ es el voltaje terminal del generador antes del cortocircuito.

Si el generador funciona con carga antes de que se produzca el cortocircuito, circularán corrientes por sus devanados y habrá una caída interna de voltaje. Los voltajes $\tilde{E}'_0$ y $\tilde{E}''_0$ pueden calcularse a partir del voltaje terminal del generador y de la corriente por fase, mediante los circuitos equivalentes, en por unidad, mostrados en la figura 4.7.

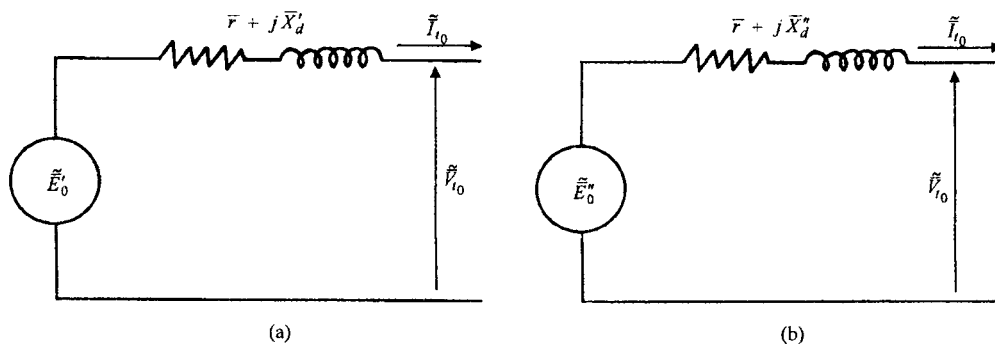


FIGURA 4.7 Circuitos equivalentes para el cálculo $\tilde{E}'_0$ y $\tilde{E}''_0$

Partiendo de las condiciones terminales existentes de la máquina síncrona inmediatamente antes de producirse el cortocircuito, el voltaje $\tilde{\tilde{E}}'_0$ puede calcularse, de acuerdo con el circuito equivalente de la figura 4.7a, mediante la expresión

$$\tilde{\tilde{E}}'_0 = \tilde{\tilde{V}}_{t0} + (r + j\bar{X}'_d) \tilde{\tilde{I}}_{t0} \quad (4.12)$$

En forma análoga puede calcularse el voltaje $\tilde{\tilde{E}}''_0$, utilizando el circuito equivalente de la figura 4.7b:

$$\tilde{\tilde{E}}''_0 = \tilde{\tilde{V}}_{t0} + (r + j\bar{X}''_d) \tilde{\tilde{I}}_{t0} \quad (4.13)$$

En la figura 4.8 se muestra el diagrama fasorial que representa las ecuaciones 4.12 y 4.13.

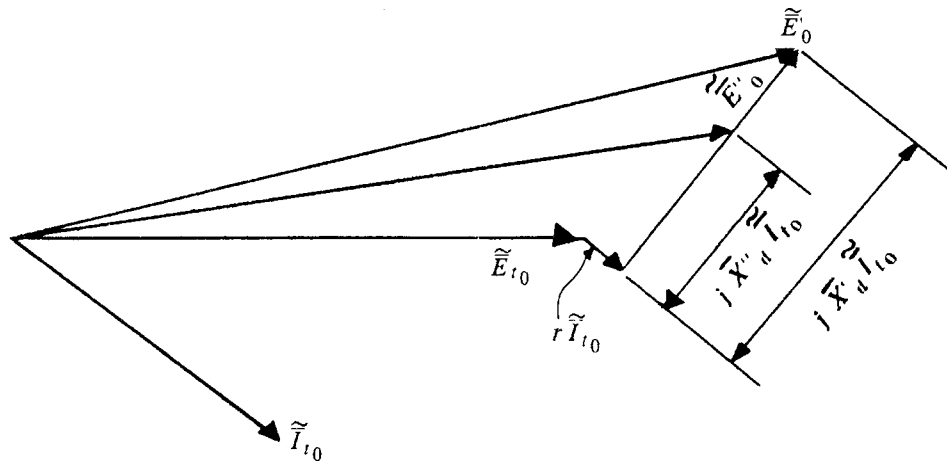


FIGURA 4.8 Diagrama fasorial que muestra los voltajes internos considerados para el cálculo de las corrientes de cortocircuito de las máquinas síncronas

EJEMPLO 4.2

Se tiene un generador síncrono con las siguientes características:

Capacidad trifásica 50 000 kVA

Voltaje terminal entre líneas 13.8 kV

Reactancias del generador, en por unidad, referidas a los valores nominales de potencia y voltaje del generador

$$\bar{X}_d = j1.2$$

$$\bar{X}'_d = j0.18$$

$$\bar{X}''_d = j0.12$$

La resistencia se considera despreciable.

Si el generador opera inicialmente alimentando una carga trifásica equilibrada igual a su capacidad nominal, con factor de potencia de 0.8 atrasado y al voltaje nominal, calcular:

1. El valor eficaz de E''_0
2. El valor eficaz de E'_0
3. El valor eficaz de la componente de corriente alterna simétrica de la corriente de cortocircuito subtransitoria
4. Lo mismo para la corriente transitoria

SOLUCIÓN

1. Cálculo del valor de $\tilde{\tilde{E}}''_0$

Voltaje terminal del generador al neutro

$$\tilde{E}_{t0} = \frac{13\ 800}{\sqrt{3}} = 7\ 967 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Corriente terminal del generador

$$\tilde{I}_{t0} = \frac{50\ 000}{13.8\sqrt{3}} (0.8 - j0.6) = 1\ 673 - j1\ 255 \text{ A}$$

Base de voltaje entre líneas

$$E_{Bl} = 13.8 \text{ kV}$$

Base de voltaje al neutro

$$E_{Bn} = \frac{13.8}{\sqrt{3}} = 7.967 \text{ kV}$$

Base de potencia trifásica

$$E_{B3} = 50\,000 \text{ kVA}$$

Base de corriente

$$I_B = \frac{50\,000}{13.8\sqrt{3}} = 2\,092 \text{ A}$$

Determinación de los valores, en por unidad, del voltaje E_{t0} y la corriente I_{t0} en las terminales del generador, existentes inmediatamente antes de producirse el cortocircuito

$$\widetilde{\widetilde{E}}_{t0} = \frac{7\,967 \angle 0^\circ}{7\,967} = 1.0 \angle 0^\circ$$

$$\widetilde{\widetilde{I}}_{t0} = \frac{2\,092(0.8 - j0.6)}{2\,092} = 0.8 - j0.6 = 1 \angle -36.9^\circ$$

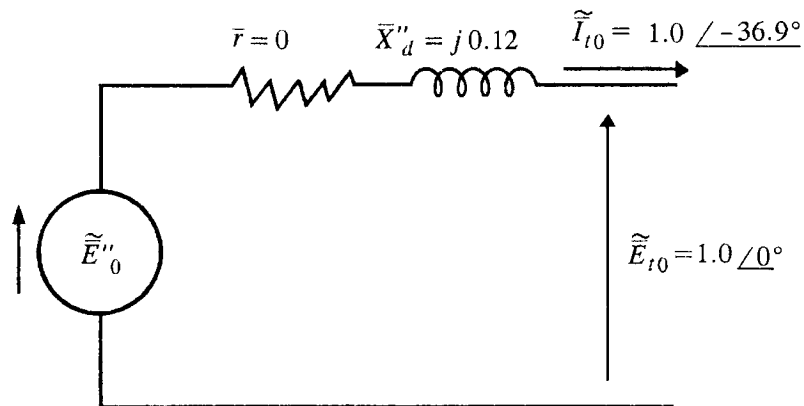
Aplicando el circuito equivalente de la figura 4.6b

$$\widetilde{\widetilde{E}}''_0 = \widetilde{\widetilde{E}}_{t0} + (\bar{r} + j\bar{X}_d) \widetilde{\widetilde{I}}_{t0}$$

$$\widetilde{\widetilde{E}}''_0 = 1.0 + (0 + j0.12)(0.8 - j0.6)$$

$$\widetilde{\widetilde{E}}''_0 = 1.072 + j0.96$$

$$\widetilde{\widetilde{E}}''_0 = 1.076 \angle 5.1^\circ$$



2. Cálculo del valor de $\tilde{\tilde{E}}'_0$

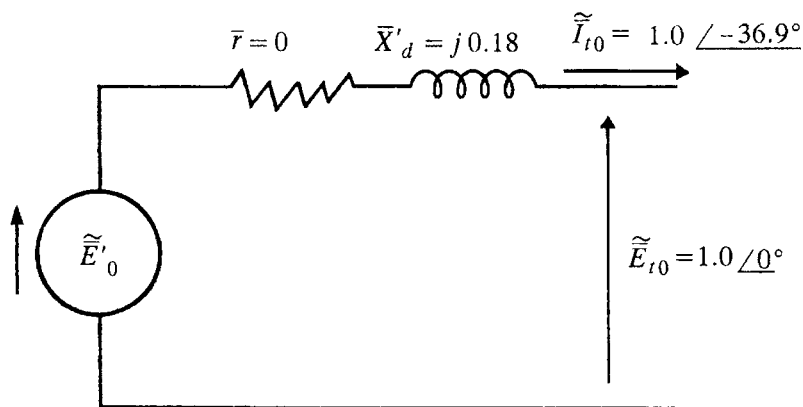
Aplicando el circuito equivalente de la figura 4.6a

$$\tilde{\tilde{E}}'_0 = \tilde{\tilde{E}}_{t0} + (\bar{r} + j\bar{X}'_d) \tilde{\tilde{I}}_{t0}$$

$$\tilde{\tilde{E}}'_0 = 1.0 + (0 + j0.18) (0.8 - j0.6)$$

$$\tilde{\tilde{E}}'_0 = 1.108 + j0.144$$

$$\tilde{\tilde{E}}'_0 = 1.117 \angle 7.4^\circ$$



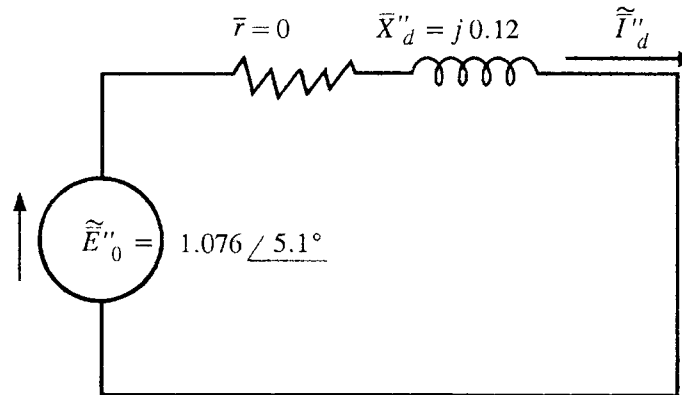
3. Cálculo del valor eficaz de la componente de corriente alterna simétrica de la corriente de cortocircuito subtransitoria.

Aplicando el circuito equivalente de la figura 4.7b

$$\tilde{\tilde{I}}''_d = \frac{\tilde{\tilde{E}}_0}{\bar{r} + j\bar{X}''_d}$$

$$\tilde{\tilde{I}}''_d = \frac{1.076 \angle 5.1^\circ}{0.12 \angle 90^\circ} = 8.967 \angle -84.9^\circ$$

$$\tilde{\tilde{I}}''_d = 2092 \times 8.967 \angle -84.9^\circ = 18759 \angle -84.9^\circ \text{ A}$$



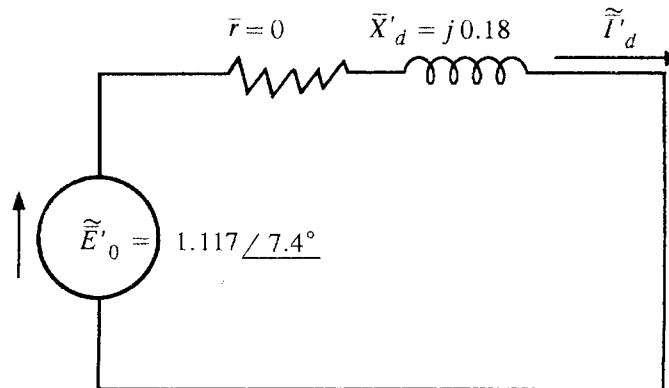
4. Cálculo del valor eficaz de la componente de corriente alterna simétrica de la corriente de cortocircuito transitoria.

Aplicando el circuito equivalente de la figura 4.7a

$$\tilde{I}_d' = \frac{\tilde{E}_0'}{\bar{r} + j\bar{X}_d'}$$

$$\tilde{I}_d' = \frac{1.117 \angle 7.4^\circ}{0.18 \angle 90^\circ} = 6.2 \angle -82.6^\circ$$

$$\tilde{I}_d' = 2\,092 \times 6.2 \angle -82.6^\circ = 12\,970 \angle -82.6^\circ \text{ A}$$



4.4 Cortocircuitos desequilibrados en las terminales de un generador síncrono. Impedancias de secuencias positiva, negativa y cero del generador

Para calcular las corrientes de falla en el caso de cortocircuito en las terminales de un alternador trifásico que afecte una o dos fases y tierra, o dos fases sin contacto a tierra, puede usarse el método de las componentes simétricas. Para ello es necesario conocer las impedancias de secuencia positiva, negativa y cero del generador.

La impedancia de secuencia positiva que debe utilizarse para calcular el valor eficaz inicial de la componente alterna simétrica de las corrientes de cortocircuito es la impedancia subtransitoria; si se desea calcular el valor de dicha componente después de los primeros ciclos de la corriente de cortocircuito debe usarse la impedancia transitoria. Corresponde, como se dijo antes, al efecto combinado de la resistencia e inductancia interna del generador y de la reacción de armadura producida por las tres corrientes alternas que circulan por las tres fases de la armadura y que constituyen un sistema de corrientes de secuencia positiva. Este sistema de corrientes da lugar a una fuerza magnetomotriz resultante que gira, en condiciones de sincronismo, a la misma velocidad y en el mismo sentido que el rotor.

La impedancia de secuencia negativa de un alternador corresponde al efecto combinado de la resistencia e inductancia interna del generador y de la reacción de armadura producida por un sistema de tres corrientes alternas de secuencia negativa que circulan por las tres fases de la armadura y que producirán una fuerza magnetomotriz que gira, en condiciones de sincronismo, a la misma velocidad que el rotor, pero en sentido contrario. Para el cálculo de las corrientes de cortocircuito la impedancia de secuencia negativa puede considerarse generalmente de la misma magnitud que la impedancia subtransitoria (o que la transitoria en los generadores que no tienen amortiguadores). La impedancia de secuencia negativa existe mientras circulen corrientes de secuencia negativa por la armadura del generador y su valor se mantiene constante.

La impedancia de secuencia cero de un alternador corresponde al efecto combinado de la resistencia e inductancia interna del alternador y de la reacción de armadura producida por un sistema de tres corrientes alternas de secuencia cero que circulen por las tres fases de la armadura y que producirán una fuerza magnetomotriz estacionaria con respecto al estator y que varía armónicamente en función del tiempo. Esta fuerza magnetomotriz estacionaria se combina con la giratoria producida por el campo o inductor de la máquina. La impedancia de secuencia cero es bastante menor que las impedancias de secuencia positiva y negativa.

En los cálculos de corrientes de cortocircuito pueden despreciarse las resistencias de secuencia positiva, negativa y cero del generador ya que son mucho menores que las reactancias de secuencia positiva, negativa y cero.

En la figura 4.9 aparecen los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero de un alternador trifásico conectado en estrella, con el neutro conectado directamente a tierra.

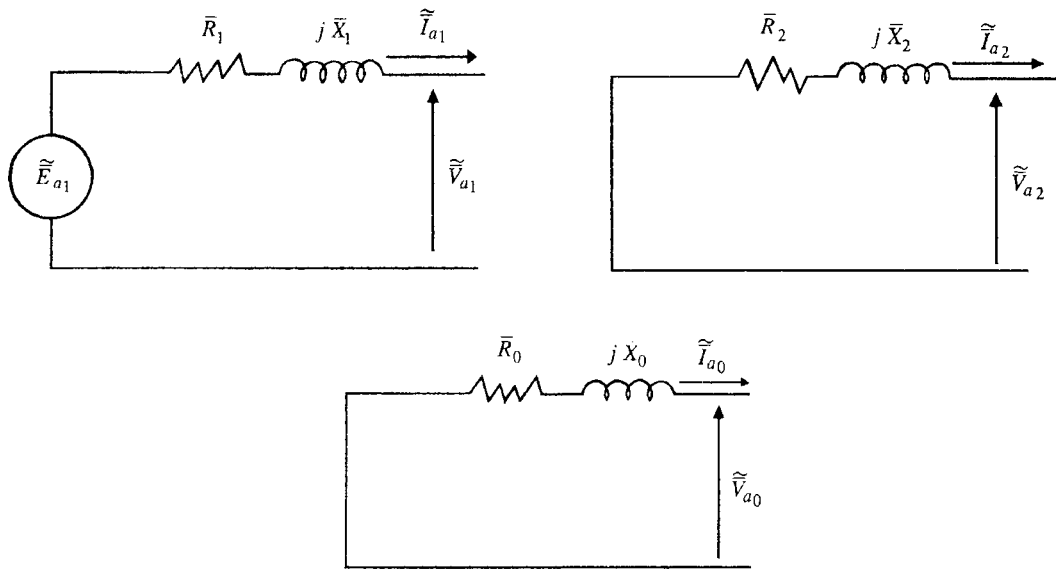


FIGURA 4.9 Circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero de un alternador trifásico conectado en estrella con el neutro a tierra

Como las fuerzas electromotrices generadas por los alternadores trifásicos constituyen sistemas trifásicos equilibrados de secuencia positiva, sólo aparece una fuente de fuerza electromotriz en el circuito equivalente de secuencia positiva.

Si el neutro del alternador está conectado a tierra a través de una impedancia, como se muestra en la figura 4.10, en caso de una falla monofásica a tierra circulará por el neutro una corriente $I_n = 3I_{a0}$. La caída de voltaje en la impedancia del neutro es

$$V_n = Z_n I_n = 3Z_n I_{a0}$$

En este caso el circuito equivalente de secuencia cero queda como se muestra en la figura 4.11.

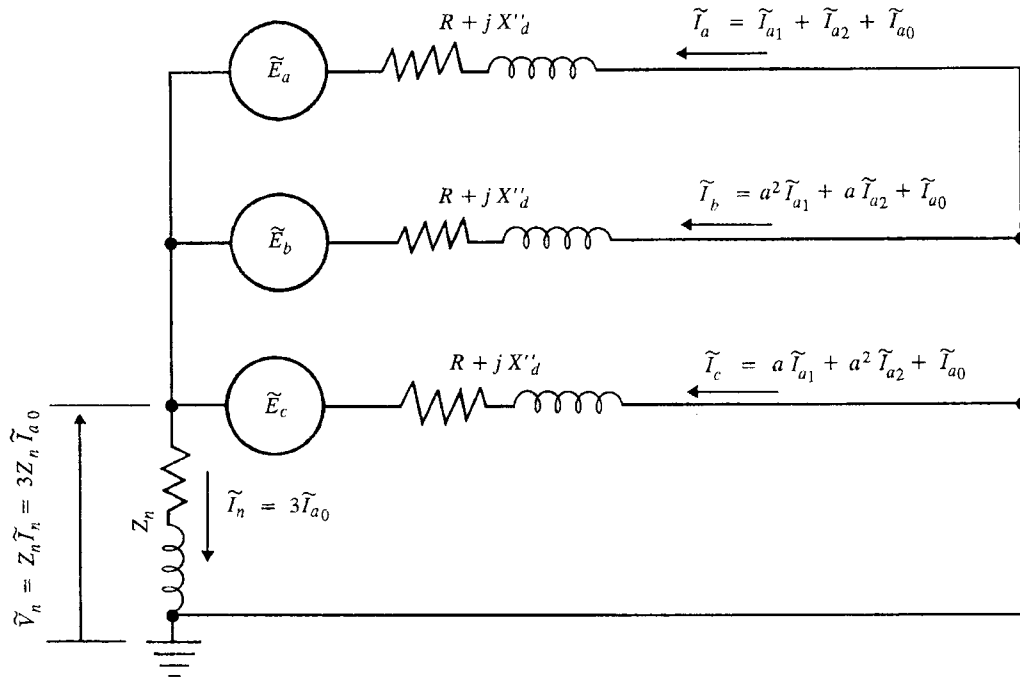


FIGURA 4.10 Alternador trifásico conectado en estrella con neutro a tierra a través de una impedancia

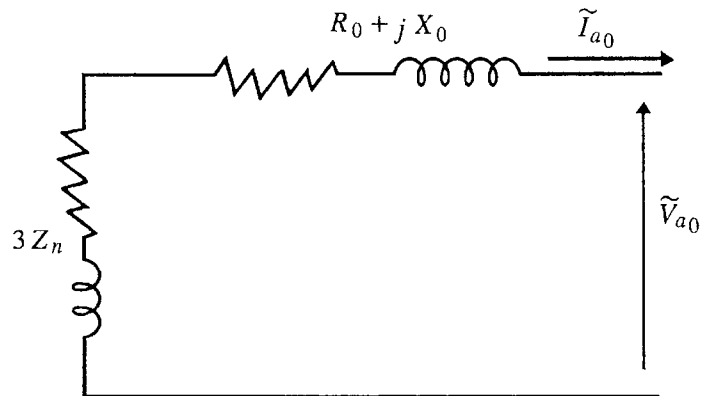


FIGURA 4.11 Circuito equivalente de secuencia cero de un alternador trifásico conectado en estrella con el neutro a tierra a través de una impedancia

Si el neutro del alternador no está conectado a tierra no podrán circular corrientes de secuencia cero. Esta condición equivale a considerar Z_n como infinita y a tener un circuito abierto en el circuito equivalente de secuencia cero.

Si el alternador está conectado en delta (cosa muy poco frecuente) puede sustituirse por una conexión estrella equivalente con el punto neutro aislado.

EJEMPLO 4.3

Se tiene un generador trifásico de las siguientes características:

Potencia trifásica 50 000 kVA con $FP = 0.8$

Voltaje nominal entre líneas 13.8 kV

$$\bar{X}_{11} = j0.15$$

$$\bar{X}_{22} = j0.16$$

$$\bar{X}_{00} = j0.10$$

Las resistencias de secuencia positiva, negativa y cero son despreciables.

El generador está conectado en estrella con el neutro directamente a tierra.

Con el generador operando inicialmente en vacío (sin carga conectada) con un voltaje terminal de 13.8 kV, se produce un cortocircuito de la terminal de la fase a a tierra.

Calcular

1. El valor eficaz inicial de la componente de corriente alterna simétrica de la corriente de cortocircuito.
2. El valor máximo inicial de la componente de corriente continua.
3. El valor eficaz de la corriente total de cortocircuito durante el primer ciclo, despreciando el amortiguamiento.
4. El valor máximo o de cresta de la corriente total de cortocircuito durante el primer ciclo, despreciando el amortiguamiento.

SOLUCIÓN

1. Valor eficaz inicial

$$\widetilde{E}_{a_1} = 1 \angle 0^\circ$$

$$\tilde{I}_{a_1}'' = \tilde{I}_{a_2}'' = \tilde{I}_{a_0}'' = \frac{1 \angle 0^\circ}{j0.15 + j0.16 + j0.10} = j1.439$$

$$\tilde{I}_a'' = 3\tilde{I}_{a_1}'' = -j7.317$$

$$I_B = \frac{50\,000}{13.8\sqrt{3}} = 2\,092 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_a = -j7.317 \times 2\,092 = -j15\,307 \text{ A}$$

Este es el valor eficaz de la componente de corriente alterna simétrica.

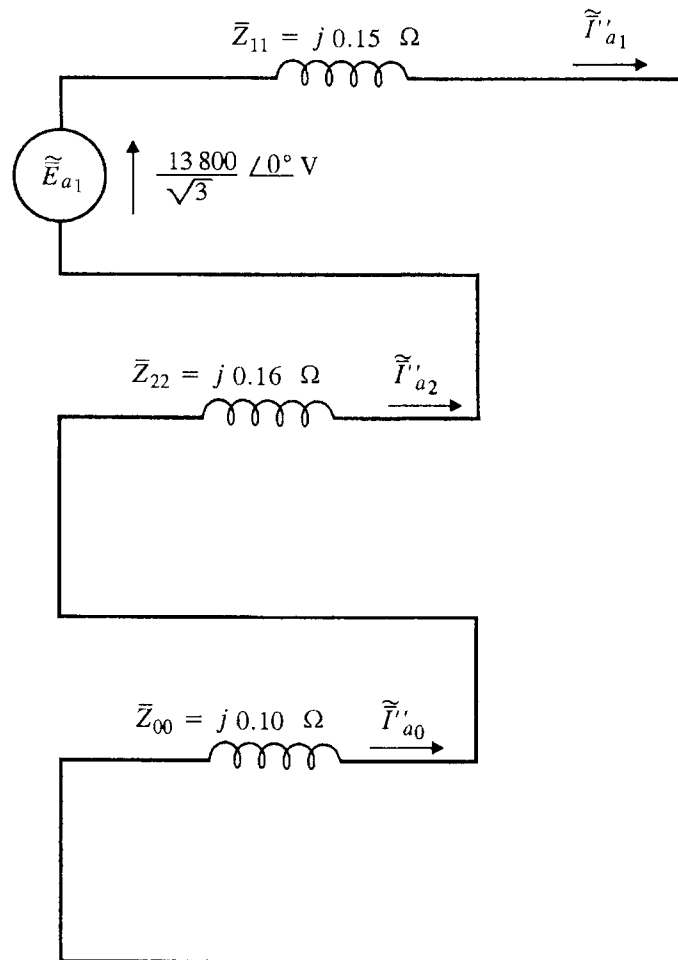


FIGURA 4.12 Conexión de los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero para el caso del ejemplo 4.3

2. Si el cortocircuito se produce cuando el valor instantáneo del voltaje terminal de la fase a del generador es igual a cero, la magnitud de la componente de corriente continua será máxima y tendrá un valor inicial igual al valor de cresta inicial de la componente de corriente alterna pero de signo contrario.

$$I_{cc} = -\sqrt{2} I_a'' = -\sqrt{2} \times 15\,307 = -21\,648 \text{ A}$$

3. Si se desprecia el amortiguamiento de las componentes de corriente continua y de corriente alterna durante el primer ciclo, el valor eficaz de la corriente total de cortocircuito resulta ser

$$I_{as} = \sqrt{I_{cc}^2 + I_a''^2} = \sqrt{(-\sqrt{2} I_a'')^2 + I_a''^2} = I_a'' \sqrt{3}$$

$$I_{as} = 15\,307 \sqrt{3} = 26\,513 \text{ A}$$

4. En la siguiente figura se muestran los valores instantáneos de la corriente de cortocircuito total y de sus componentes, durante el primer ciclo, despreciando el amortiguamiento.

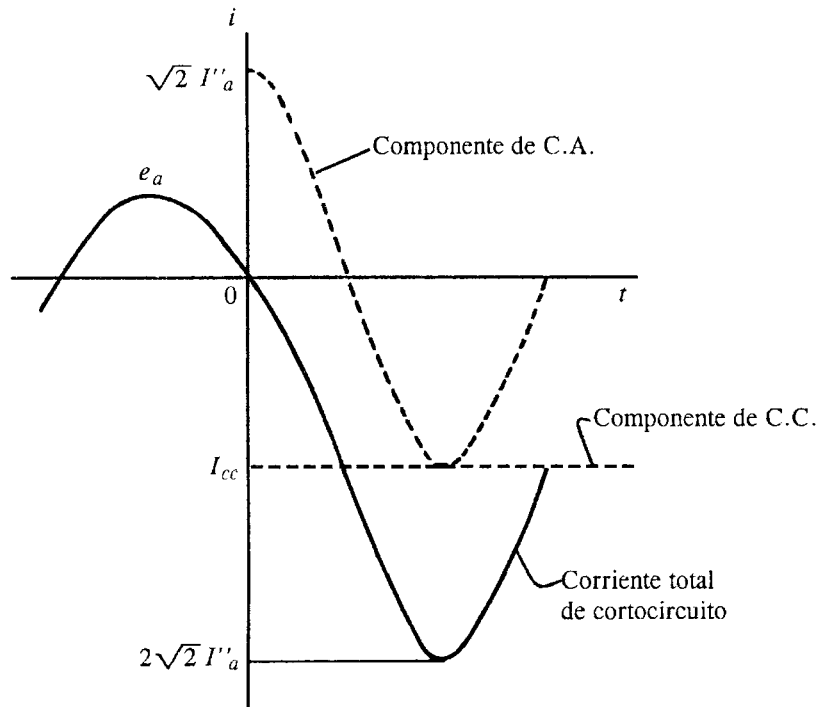


FIGURA 4.13 Valores instantáneos de la corriente total de cortocircuito y de sus componentes

Puede verse que si se desprecia el amortiguamiento, la corriente total de cortocircuito, para el caso en que se produce la máxima asimetría, alcanza un valor instantáneo máximo de magnitud igual a

$$I_{m\acute{a}x} = I_{cc} + \sqrt{2} I_a'' = 2 \sqrt{2} I_a''$$

$$I_{m\acute{a}x} = 2 \sqrt{2} \times 15\,324 = 43\,343 \text{ A, valor de cresta}$$

4.5 Contribución de los motores eléctricos a las corrientes de cortocircuito

Los motores eléctricos contribuyen a las corrientes de cortocircuito debido a la energía cinética almacenada en el rotor.

Los motores síncronos se comportan durante el cortocircuito como un generador síncrono y, en consecuencia, se representan mediante el mismo circuito equivalente, utilizando la reactancia subtransitoria si se desea calcular la corriente de falla durante los primeros ciclos o la reactancia transtoria para calcular la corriente de falla en el periodo consecutivo.

En el caso de los motores de inducción sólo debe considerarse la reactancia subtransitoria, debido a que en este tipo de motores la excitación procede de la corriente alterna del estator, en lugar de tener un devanado recorrido por corriente continua en el rotor como ocurre en los motores y generadores síncronos; al producirse el cortocircuito, el voltaje aplicado a los devanados del estator de los motores de inducción disminuye y el flujo producido por las corrientes del estator decae rápidamente. La impedancia subtransitoria de un motor de inducción es prácticamente igual a la reactancia medida aplicando voltaje pleno con el rotor parado.

CAPÍTULO 5

CÁLCULO DE LAS CORRIENTES Y VOLTAJES EN UN SISTEMA INTERCONECTADO DURANTE UN CORTOCIRCUITO

En este capítulo se aplicará el método de las componentes simétricas al cálculo de las corrientes y voltajes en distintos puntos de un sistema trifásico interconectado afectado por un cortocircuito, teniendo en cuenta el comportamiento de los generadores, las impedancias de la red y la influencia de las distintas conexiones trifásicas de los transformadores.

En todos los casos se supondrá que las fuerzas electromotrices de los generadores del sistema están equilibradas y que el sistema trifásico es simétrico, o sea que las impedancias propias de las tres fases son iguales entre sí y las impedancias mutuas entre fases son también iguales entre sí, de manera que la única asimetría se produce en el punto de falla para el caso de fallas monofásicas a tierra o fallas entre dos fases.

En el capítulo 1 se demostró que el cálculo de un sistema trifásico desequilibrado puede realizarse estableciendo tres circuitos equivalentes (de secuencia positiva, negativa y cero) derivados del sistema trifásico en cuestión, interconectándolos en forma adecuada y resolviendo el circuito resultante.

El análisis realizado en el capítulo 1 puede generalizarse a un sistema trifásico interconectado, con varias máquinas generadoras, si los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero de la figura 1.12 se consideran como circuitos equivalentes de Thevenin correspondientes al sistema interconectado visto desde el punto de falla.

Si las fuerzas electromotrices aplicadas al sistema trifásico por los generadores están equilibradas, como es generalmente el caso en la práctica, dichas fuerzas electromotrices no tendrán más que componentes de secuencia positiva y los circuitos equivalentes de Thevenin de secuencia negativa y cero se simplifican como se indicó anteriormente, quedando reducidos a circuitos pasivos.

A continuación se analizará en forma detallada, en primer lugar, el cálculo de la corriente de cortocircuito en el punto de falla para fallas equilibradas y desequilibradas y, a continuación, el cálculo de las corrientes y los voltajes en distintos puntos de un sistema interconectado afectado por un cortocircuito en un punto determinado.

5.1 Cálculo de las corrientes de cortocircuito en el punto de falla de un sistema interconectado

Considérese el sistema trifásico interconectado mostrado mediante el diagrama unifilar de la figura 5.1, constituido por dos generadores, dos transformadores, una línea de transmisión, y una carga pasiva.



FIGURA 5.1 Diagrama unifilar de un sistema trifásico con dos generadores y una carga

Supóngase que ocurre una falla de aislamiento en el punto F.

Para aplicar el método de las componentes simétricas para el cálculo de los diferentes tipos de falla, deben establecerse los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero como se indica en la figura 5.2. Conviene establecer los circuitos equivalentes, en por unidad, para eliminar los distintos niveles de voltaje.

Si las fuerzas electromotrices de los generadores permanecen equilibradas durante el cortocircuito, lo que puede considerarse que ocurre en la generalidad de los casos, sólo aparecerán fuentes de fuerza electromotriz en el circuito equivalente de secuencia positiva.

Los circuitos equivalentes de secuencia negativa y cero estarán formados únicamente de elementos pasivos y pueden reducirse, cada uno de ellos, a una impedancia equivalente $\bar{Z}_{22}$ y $\bar{Z}_{00}$, mediante las combinaciones adecuadas de impedancias en serie y en paralelo.

Reducidos en esta forma los circuitos equivalentes de secuencia negativa y cero pueden conectarse al circuito de secuencia positiva entre el punto de falla y el neutro, en la forma adecuada de acuerdo con el tipo de falla considerado, como se estableció en el capítulo 1.

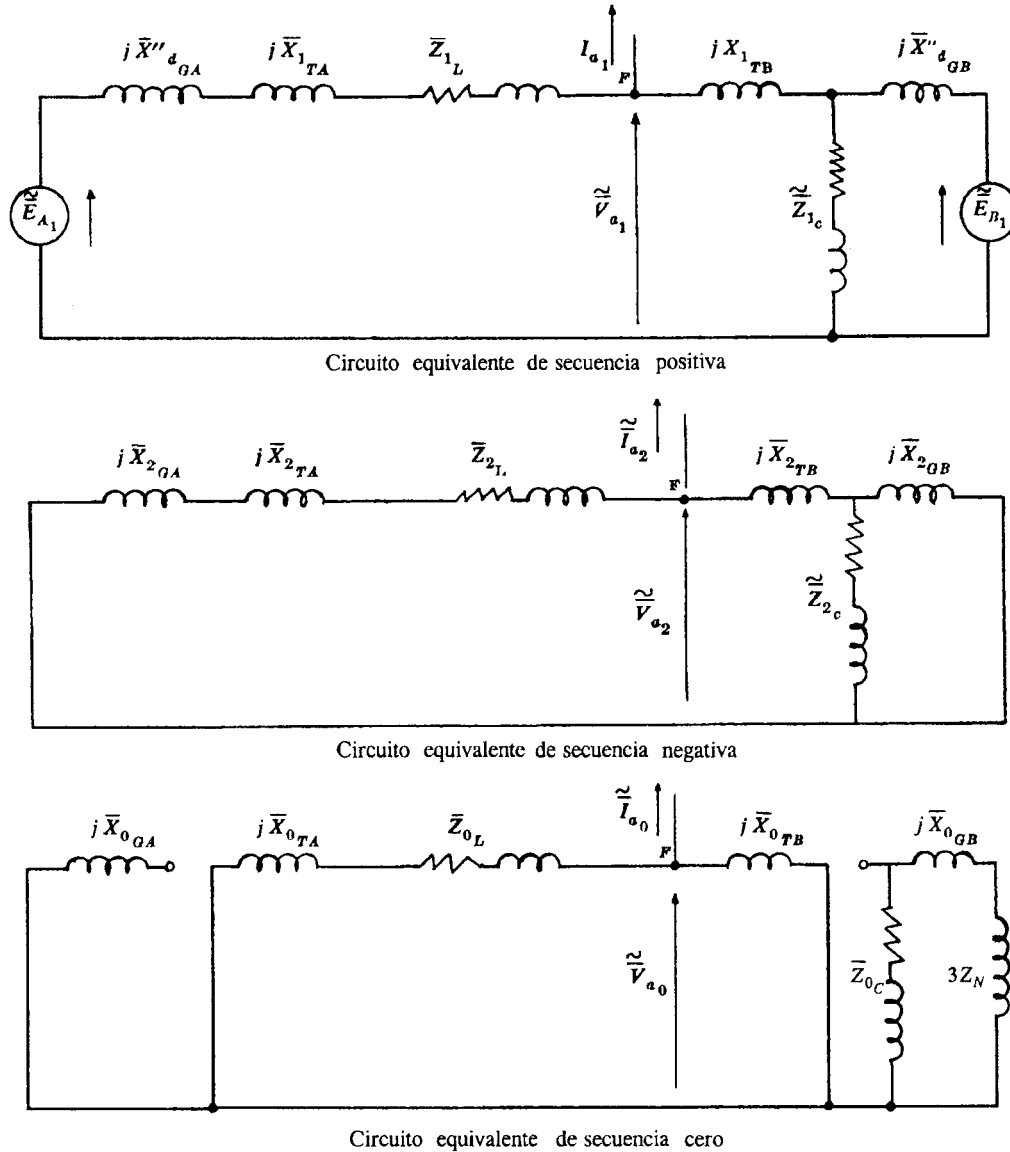


FIGURA 5.2 Circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero
del sistema interconectado de la figura 5.1

En la figura 5.3 se conectan en serie las impedancias equivalentes de secuencia negativa y cero entre el punto F del circuito equivalente de secuencia positiva y el neutro de dicho circuito equivalente, para satisfacer las condiciones de una falla monofásica a tierra.

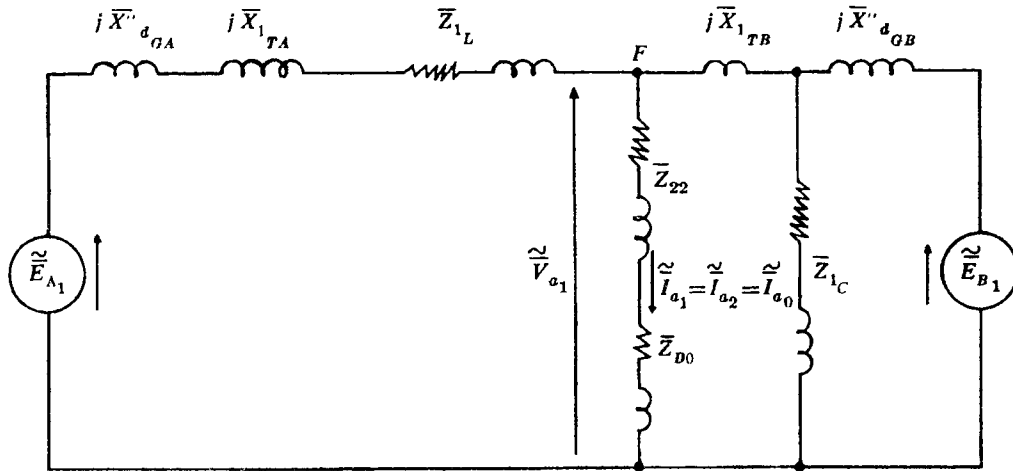


FIGURA 5.3 Conexión de las impedancias equivalentes de secuencia negativa y cero en el circuito equivalente de secuencia positiva, para satisfacer las condiciones de un cortocircuito monofásico a tierra en el punto F

Una simplificación análoga puede hacerse para el caso de otros tipos de falla. Por ejemplo, en la figura 5.4 se muestra la forma en que deben conectarse las impedancias equivalentes de secuencia negativa y cero en el circuito equivalente de secuencia positiva para satisfacer las condiciones de una falla bifásica a tierra; en forma semejante en la figura 5.5, para el caso de la falla bifásica sin tierra; y en la figura 5.6, para el caso de la falla trifásica.

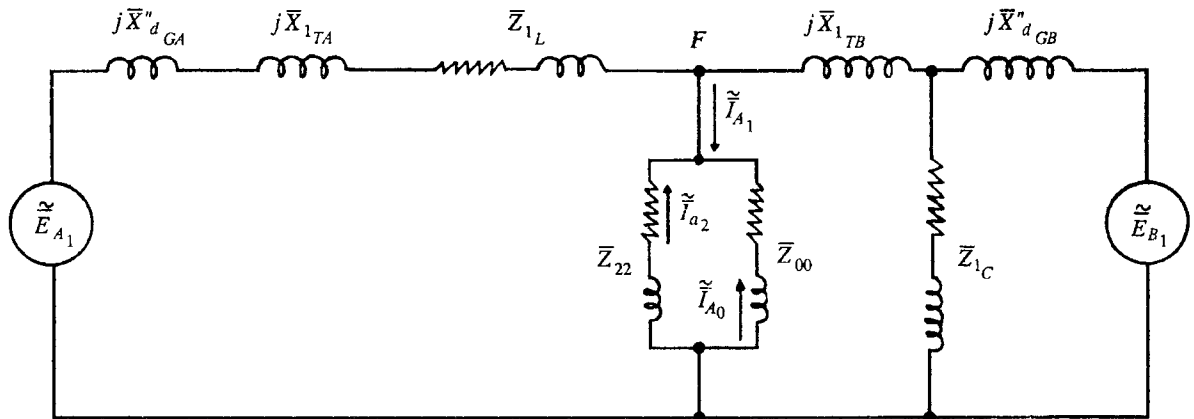


FIGURA 5.4 Conexión de las impedancias equivalentes de secuencia negativa y cero en el circuito equivalente de secuencia positiva para satisfacer las condiciones de un cortocircuito bifásico a tierra en el punto F

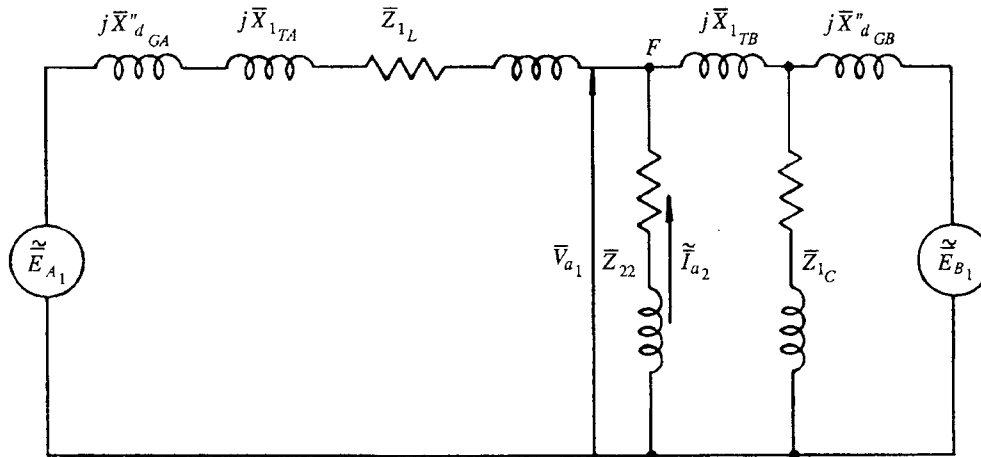


FIGURA 5.5 Conexión de la impedancia equivalente de secuencia negativa en el circuito equivalente de secuencia positiva para satisfacer las condiciones de un corto circuito bifásico en el punto F

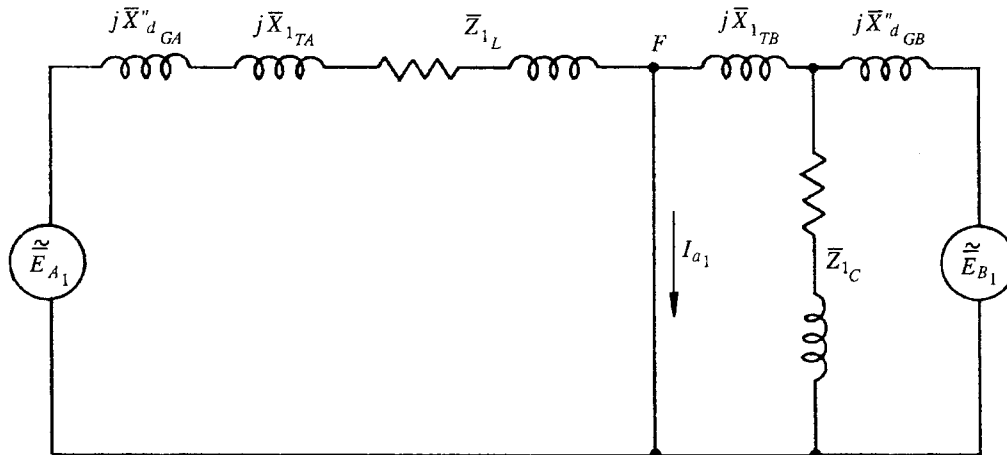


FIGURA 5.6 Conexión en el circuito equivalente de secuencia positiva para satisfacer las condiciones de un cortocircuito trifásico en el punto F

La representación de los generadores en el circuito equivalente de secuencia positiva corresponde a los circuitos equivalentes del generador mostrados en la figura 4.6. Por tanto, las fuerzas electromotrices que aparecen en el circuito equivalente de secuencia positiva son las correspondientes a los voltajes existentes detrás de la reactancia subtransitoria (o transitoria, según el caso que se considere), calculados a partir de las condiciones terminales de los

generadores, existentes inmediatamente antes de producirse el cortocircuito, como se explicó en el capítulo 4.

Para reducir el circuito equivalente de secuencia positiva, que contiene, además de elementos pasivos, elementos activos constituidos por las fuentes de fuerza electromotriz, se recurre a la aplicación del teorema de Thevenin.

El teorema de Thevenin puede formularse de la siguiente manera: si se conecta entre dos terminales de una red activa (o sea una red que contiene fuentes de fuerza electromotriz) una impedancia Z , la corriente I que circulará por esa impedancia será igual a

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_{ca}}{Z_T + Z}$$

donde

$\tilde{V}_{ca}$ diferencia de potencial que existía entre las dos terminales antes de conectar la impedancia Z

Z_T impedancia de la red medida desde las dos terminales consideradas, habiendo puesto en cortocircuito todas las fuentes de fuerza electromotriz

En otras palabras, por lo que hace al cálculo de la corriente I que circula por la impedancia Z conectada entre dos terminales de una red, la red original puede sustituirse por un generador único, cuya fuerza electromotriz sea igual al voltaje que existía entre las dos terminales antes de conectar la impedancia Z y su impedancia interna sea igual a la impedancia de la red vista desde las terminales consideradas y medida después de haber puesto en cortocircuito todas las fuentes de fuerza electromotriz.

Aplicando el teorema de Thevenin, el circuito de secuencia positiva de las figuras 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6 puede sustituirse por un circuito equivalente, con una sola fuente de fuerza electromotriz, igual al voltaje existente en el punto F del circuito equivalente de secuencia positiva antes de conectar la impedancia determinada por el tipo de falla. Este voltaje es igual al voltaje E_{a1} que existía en el punto F antes de ocurrir la falla. La impedancia de este circuito equivalente es igual a la impedancia del circuito de secuencia positiva vista desde el punto de falla, con las fuentes de fuerza electromotriz en cortocircuito.

En la figura 5.7 se muestra el circuito equivalente de secuencia positiva obtenido aplicando el teorema de Thevenin y la conexión al mismo de las impedancias equivalentes de secuencia negativa y cero para satisfacer las condiciones de los distintos tipos de falla.

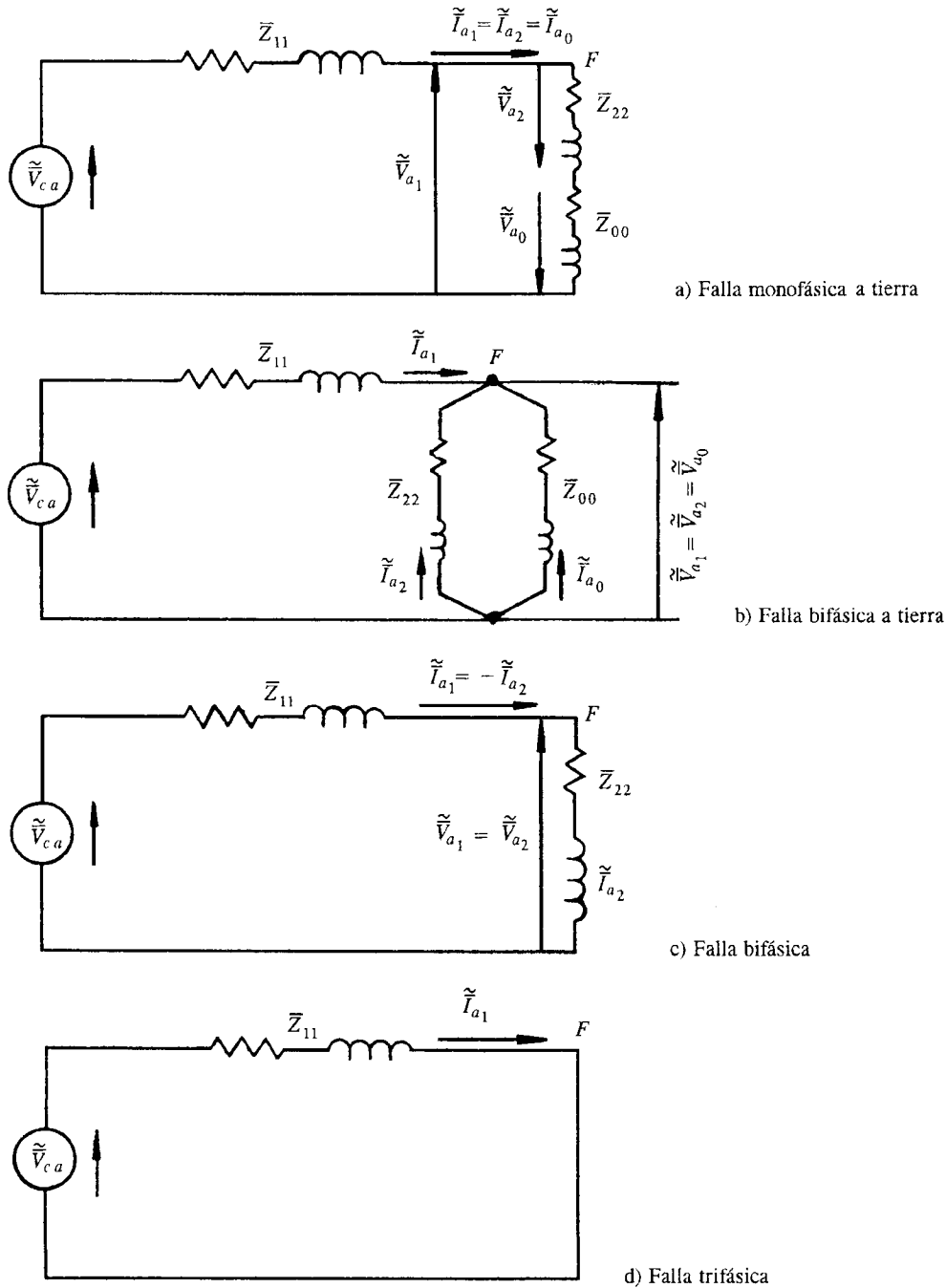


FIGURA 5.7 Conexión de las impedancias equivalentes de secuencia negativa y cero al circuito equivalente de secuencia positiva para satisfacer las condiciones de los distintos tipos de falla en el punto F

EJEMPLO 5.1

Un generador síncrono alimenta un motor síncrono y un alimentador trifásico a través de un transformador, como se muestra en el diagrama unifilar de la figura 5.8.

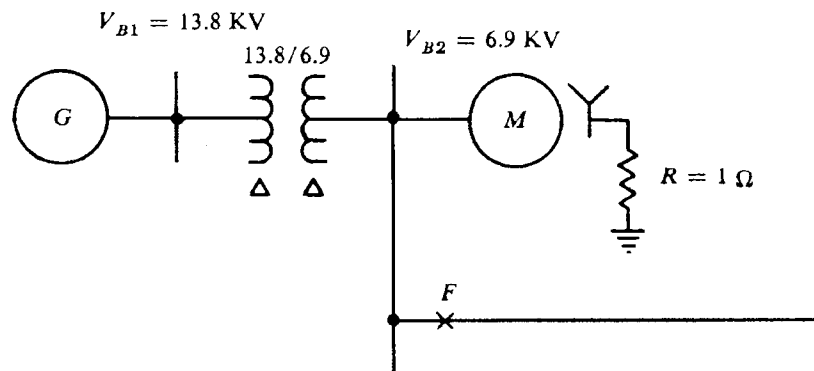


FIGURA 5.8 Diagrama unifilar del sistema del ejemplo 5.1

Las impedancias en por unidad del generador, el motor y el transformador, referidas a las bases de voltaje entre líneas indicadas en la figura y a una base de potencia trifásica de 25 MVA, son las siguientes:

Generador	Motor	Transformador
$\bar{X}_{G_1} = j0.075$	$\bar{X}_{M_1} = j0.15$	$\bar{X}_{T_1} = j0.10$
$\bar{X}_{G_2} = j0.08$	$\bar{X}_{M_2} = j0.16$	$\bar{X}_{T_2} = j0.10$
$\bar{X}_{G_0} = j0.03$	$\bar{X}_{M_0} = j0.10$	$\bar{X}_{T_0} = j0.10$
$\bar{r}_G = 0$	$\bar{r}_M = 0$	$\bar{r}_T = 0$

Ocurre un cortocircuito trifásico en el punto F del alimentador cuando este no tiene carga conectada. El voltaje entre líneas en el punto de falla antes de ocurrir la falla era de 6.55 kV.

Las condiciones terminales del motor síncrono antes de ocurrir la falla eran

Voltajes entre líneas = 6.55 kV

Potencia real = 25 MW

Potencia reactiva = 0 mVAR

Durante el cortocircuito el motor síncrono contribuye a la corriente de falla como si fuera un generador debido a la energía cinética almacenada en el rotor.

Calcular

El voltaje $\tilde{e}_{0G}''$ detrás de la reactancia subtransitoria del generador.

El voltaje $\tilde{e}_{0M}''$ detrás de la reactancia subtransitoria del motor.

La corriente por fase del generador durante el cortocircuito.

La corriente por fase del motor durante el cortocircuito.

La corriente por fase de cortocircuito en el punto de falla partiendo de los valores anteriores.

La corriente por fase de cortocircuito en el punto de falla haciendo uso del teorema de Thevenin.

SOLUCIÓN

1. Condiciones anteriores a la ocurrencia de la falla ($t = 0^-$)

Voltaje al neutro en las terminales del motor, en por unidad

$$\frac{6.55}{6.9} = 0.95 \angle 0^\circ$$

Corriente por fase del motor

$$\frac{25\,000}{6.55\sqrt{3}} = 2\,204 \text{ A}$$

Base de corriente aplicable al motor

$$\frac{25\,000}{6.9\sqrt{3}} = 2\,092 \text{ A}$$

Corriente por fase del motor en por unidad

$$\frac{2\,204 \angle 0^\circ}{2\,092} = 1.053 \angle 0^\circ$$

$$\tilde{e}_{0M}'' = \tilde{V}_{t_M} - j\bar{X}_{d_M} \times \tilde{I}_{t_M}$$

$$\tilde{e}_{0M}'' = 0.95 - j0.15 \times 1.053 = 0.95 - j0.158 = 0.963 \angle -9.4^\circ$$

$$\tilde{e}_{0G}'' = \tilde{V}_{t_M} + (j\bar{X}_{d_G} + j\bar{X}_T) \tilde{I}_{t_M}$$

$$\tilde{e}_{0G}'' = 0.95 + (j0.075 + j0.10) 1.053 = 0.95 + j0.184 = 0.968 \angle -11^\circ$$

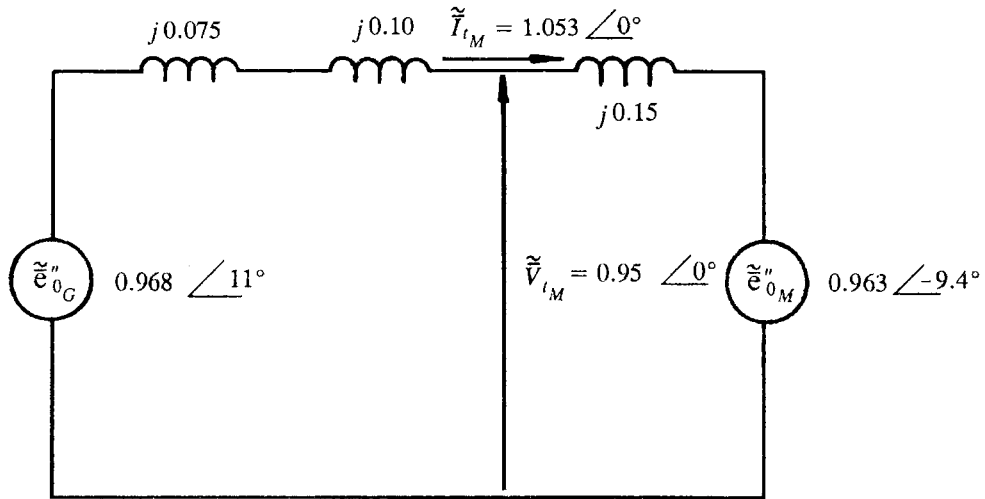


FIGURA 5.9 Circuito que representa las condiciones iniciales del ejemplo 5.1

2. Condiciones después de ocurrir la falla trifásica ($t = 0+$)

$$\tilde{I}_{dG}'' = \frac{\tilde{e}_{0G}''}{j\bar{X}_{dG}'' + j\bar{X}_T} = \frac{0.95 + j0.175 \times 1.053}{j0.175} = -j5.429 + 1.053$$

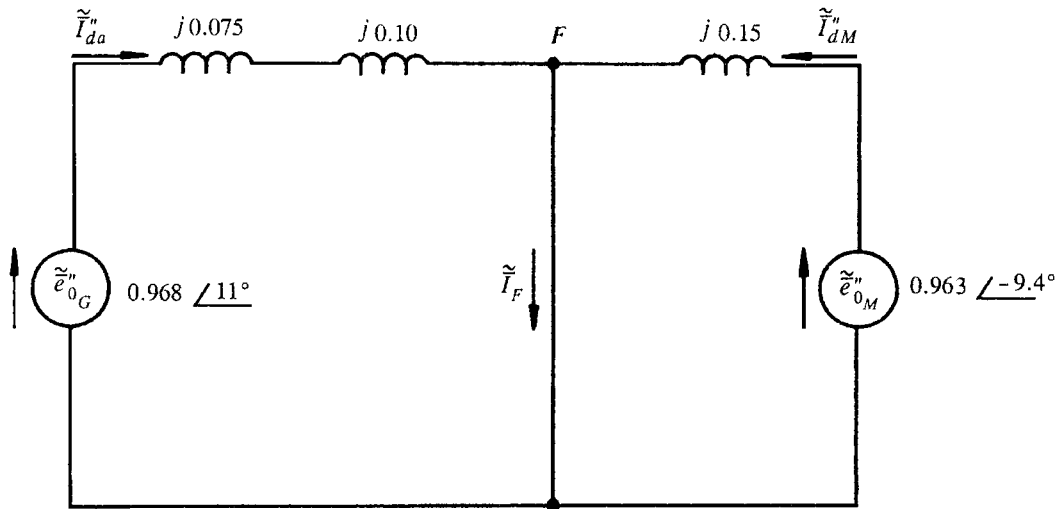


FIGURA 5.10 Circuito que representa las condiciones después de ocurrir la falla en el ejemplo 5.1

$$\tilde{I}_{d_M}'' = \frac{\tilde{e}_{0_M}''}{j\tilde{X}_{d_M}''} = \frac{0.95 - j0.15 \times 1.053}{j0.15} = -j6.333 - 1.053$$

$$\tilde{I}_F = \tilde{I}_{d_G} \times \tilde{I}_{d_M} = -j5.429 + 1.053 - j6.333 - 1.053$$

$$\tilde{I}_F = -j11.762$$

$$\tilde{I}_F = -j11.762 \times 2\,091 = -j24\,606 \text{ A}$$

3. Solución usando el teorema de Thevenin

El circuito equivalente de Thevenin para una falla trifásica en el punto F de la fase a es como se muestra en la figura 5.11.

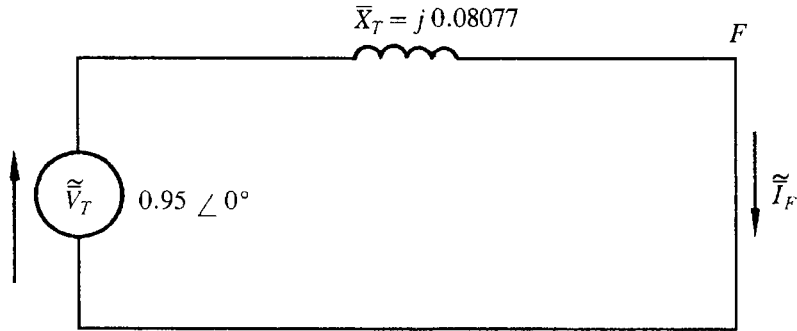


FIGURA 5.11 Circuito equivalente de Thevenin para el ejemplo 5.1

$\tilde{V}_T$ es el voltaje que existía en el punto de falla, antes de ocurrir ésta

$$\tilde{V}_T = 0.95 \angle 0^\circ$$

$\bar{X}_T$ es la impedancia de la red vista desde el punto de falla

$$\bar{X}_T = \frac{j0.175 \times j0.15}{j0.175 + j0.15} = j0.08077$$

$$\tilde{I}_F = \frac{\tilde{V}_T}{\tilde{X}_T} = \frac{0.95}{j0.08077} = -j11.762$$

que es el mismo valor encontrado anteriormente.

Nótese que la aplicación del teorema de Thevenin permite el cálculo de las corrientes en el punto de la falla exclusivamente.

Como se trata de un cortocircuito trifásico, las corrientes en las fases *b* y *c* son de igual magnitud que la de la fase *a* y están desfasadas con respecto a ésta 240° 120° , respectivamente.

EJEMPLO 5.2

En el sistema eléctrico considerado en el ejemplo 5.1, ocurre un cortocircuito monofásico a tierra en el punto *F* de la fase *a* del alimentador, cuando éste no tiene carga conectada. El voltaje entre líneas en el punto de falla antes de ocurrir la falla era de 6.55 kV.

Las condiciones terminales del motor síncrono antes de ocurrir la falla son las mismas que en el problema 5.1.

Calcular

1. Empleando el teorema de la superposición
2. Empleando el teorema de Thevenin

En los dos casos obtener

- a) El valor eficaz de la componente de frecuencia fundamental de la corriente inicial de cortocircuito (corriente subtransitoria) en por unidad y en amperes.
- b) Las corrientes por fase y los voltajes al neutro en las tres fases, en el punto de falla.

SOLUCIÓN

1. Teorema de la superposición

- a) Corriente inicial de cortocircuito

En la figura 5.12 se muestran los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero del sistema y su conexión para representar las condiciones de una falla monofásica a tierra en el punto *F*.

En el circuito de secuencia cero el valor de la resistencia, en por unidad, $3\bar{R}$ que toma en cuenta la existencia de una resistencia $R = 1 \Omega$ en el neutro a tierra del motor se calculó de la siguiente manera:

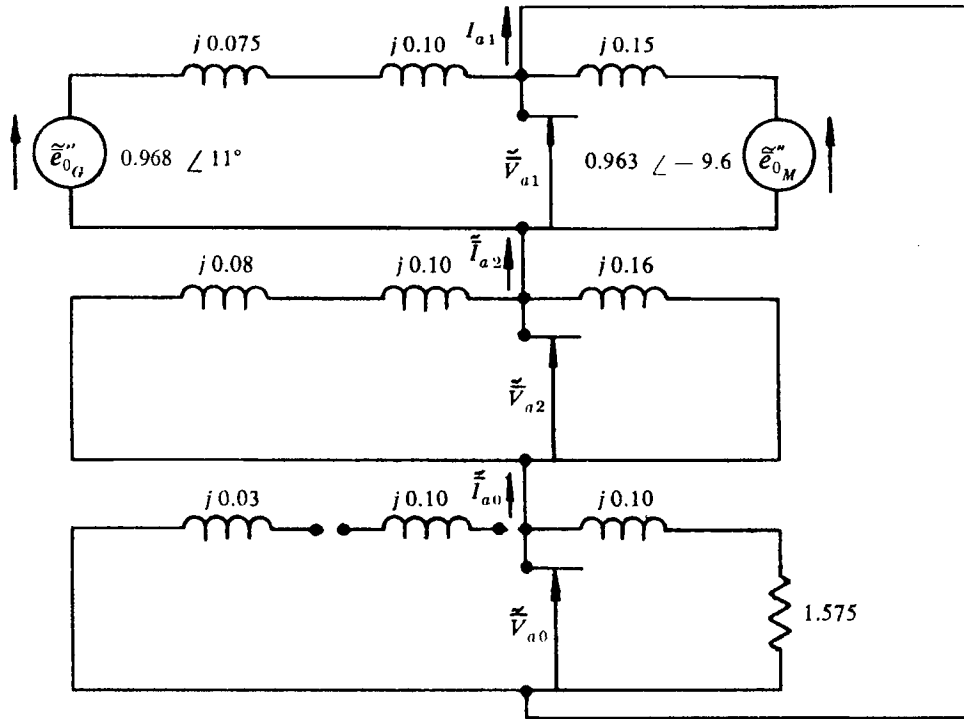


FIGURA 5.12 Conexión de los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero para el caso del ejemplo 5.2

$$Z_{B_2} = \frac{(V_{B_2})^2}{S_B} = \frac{6.9^2}{25} = 1.904 \Omega$$

$$\bar{R} = \frac{R}{Z_{B_2}} = \frac{1}{1.904} = 0.525$$

$$3\bar{R} = 3 \times 0.525 = 1.575$$

Las condiciones anteriores a la ocurrencia de la falla, que son las mismas que las del problema 5.1, están indicadas en la figura 5.9.

Las condiciones después de ocurrir la falla monofásica a tierra pueden representarse reduciendo el circuito equivalente de secuencia negativa a una impedancia equivalente y lo mismo puede hacerse para el circuito equivalente de secuencia cero, conectando dichas impedancias equivalentes en el circuito de secuencia positiva, como se indica en la figura 5.13a.

$$\bar{Z}_{22} = \frac{j0.18 \times j0.16}{j0.18 + j0.16} = j0.0847$$

$$\bar{Z}_{00} = 1.575 + j0.10$$

Conocidas las fuentes de voltaje y las impedancias del circuito de la figura 5.13a, las corrientes pueden calcularse por diversos procedimientos, por ejemplo haciendo uso del teorema de la superposición, que puede formularse diciendo que en cualquier red formada por fuentes de voltaje constantes e impedancias lineales, la corriente que circula por cualquier rama es la suma de las corrientes que circularían si cada fuente de voltaje se considerase separadamente, poniendo en cortocircuito todas las otras fuentes de voltaje de la red (cuya impedancia interna es igual a cero).

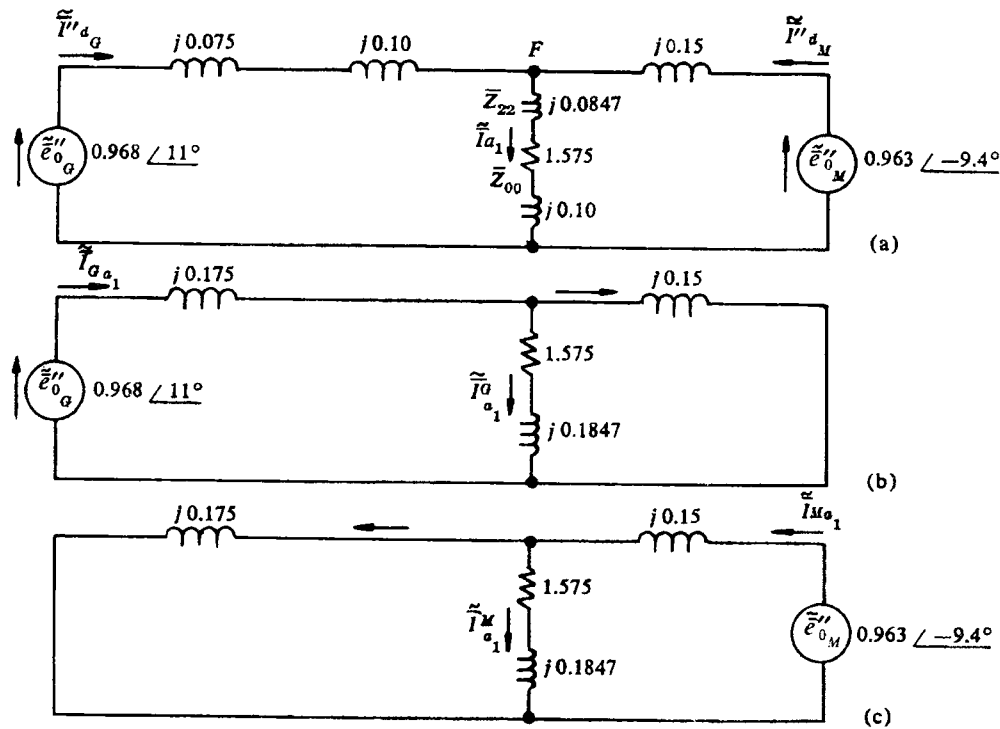


FIGURA 5.13 Aplicación del teorema de la superposición para resolver el problema del ejemplo 5.2

En la figura 5.13b se muestra el circuito resultante de considerar que sólo actúa la fuente de voltaje correspondiente al generador, estando la otra fuente de voltaje en cortocircuito. En este caso la impedancia total del circuito es

$$Z = j0.175 + \frac{j0.15(1.575 + j0.1847)}{j0.15 + 1.575 + j0.1847} = 0.01364 + j0.32206$$

La corriente de secuencia positiva suministrada por la fuente de voltaje que representa al generador, estando en cortocircuito la otra fuente de voltaje, resulta

$$\tilde{\tilde{I}}'_{G_{a1}} = \frac{0.968 \angle 11^\circ}{0.01364 + j0.32206} = 3.009 \angle -76.6^\circ$$

y la contribución de esta fuente de voltaje a la corriente de cortocircuito

$$\tilde{\tilde{I}}'_{a1} = 3.009 \angle -76.6^\circ \left[\frac{j0.15}{1.575 + j0.1847 + j0.15} \right] = 0.28 \angle 1.4^\circ$$

En la figura 5.13c se muestra el circuito resultante de considerar que sólo actúa la fuente de voltaje correspondiente al motor, estando la otra fuente de voltaje en cortocircuito. En este caso la impedancia total del circuito es

$$Z' = j0.15 + \frac{j0.175(1.575 + j0.1847)}{j0.175 + 1.575 + j0.1847} = 0.321 \angle 86.8^\circ$$

La corriente de secuencia positiva suministrada por la fuente de voltaje que representa al motor, estando la otra fuente de voltaje en cortocircuito, resulta:

$$\tilde{\tilde{I}}''_{M_{a1}} = \frac{0.963 \angle -9.4^\circ}{0.321 \angle 86.8^\circ} = 3.0 \angle -96.2^\circ$$

y la contribución de esta fuente de voltaje a la corriente de cortocircuito

$$\tilde{\tilde{I}}''_{a1} = 3.0 \angle -96.2^\circ \left[\frac{j0.175}{1.575 + j0.1847 + j0.175} \right] = 0.32 \angle -19^\circ$$

La corriente total de cortocircuito es la suma de las corrientes aportadas al cortocircuito por el generador y por el motor

$$\tilde{\tilde{I}}_{a1} = \tilde{\tilde{I}}'_{a1} + \tilde{\tilde{I}}''_{a1} = 0.28 \angle 1.4^\circ + 0.32 \angle -19^\circ = 0.59 \angle -9.5^\circ$$

2. Teorema de Thevenin

a) Corriente inicial de cortocircuito

El voltaje al neutro de la fase a en el punto F antes de ocurrir la falla, que únicamente tiene componente de secuencia positiva ya que antes de la falla el sistema está equilibrado, es igual, en por unidad, a

$$\bar{V}_{a_1} = \frac{6.55}{6.9} = 0.95$$

Aplicando el teorema de Thevenin al circuito de secuencia positiva de la figura 5.12 y reduciendo los circuitos de secuencia negativa y cero, de dicha figura a una impedancia equivalente por combinación en paralelo de las dos ramas de cada circuito, tenemos

$$Z_{11} = \frac{j0.175 \times j0.15}{j0.175 + j0.15} = j0.0808$$

$$Z_{22} = \frac{j0.18 \times j0.16}{j0.18 + j0.16} = j0.0847$$

$$Z_{00} = 1.575 + j0.10$$

se obtiene el circuito equivalente de Thevenin que se muestra en la figura 5.14.

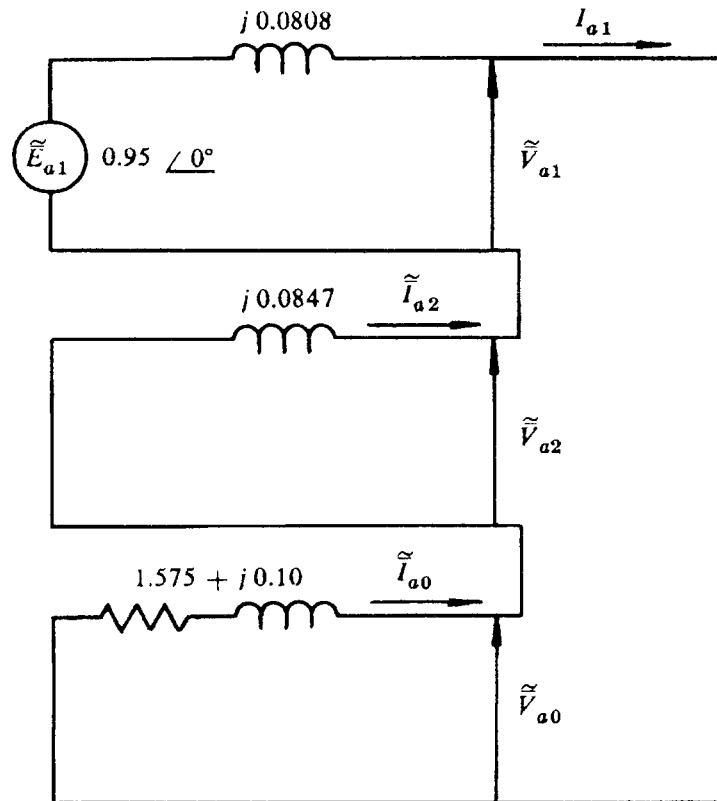


FIGURA 5.14 Reducción de los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero del ejemplo 5.2

En dicho circuito se verifica

$$\tilde{I}_{a_1} = \tilde{I}_{a_2} = \tilde{I}_{a_0} = \frac{0.95}{1.575 + j0.2655} = \frac{0.95}{1.597 \angle 9.6^\circ} = 0.595 \angle -9.6^\circ$$

Valor eficaz de la componente de frecuencia fundamental de la corriente inicial de cortocircuito

$$\tilde{I}_a = 3\tilde{I}_{a_1} = 3 \times 0.595 \angle -9.6^\circ = 1.785 \angle -9.6^\circ$$

$$I_B = \frac{25\,000}{6.9 \sqrt{3}} = 2\,092 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_a = 2092 \times 1.785 \angle -9.6^\circ = 3734 \angle -9.6^\circ \text{ A}$$

b) Corrientes por fase y voltajes al neutro en las tres fases en el punto de falla, para los dos casos

Partiendo de las componentes de secuencia positiva, negativa y cero de la corriente de la fase a , calculadas en el punto anterior, pueden calcularse las corrientes en las tres fases, en el punto de falla, de la siguiente manera:

$$\tilde{I}_a = \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = 3 \times 0.595 \angle -9.6^\circ = 1.785 \angle -9.6^\circ$$

$$\tilde{I}_b = a^2 \tilde{I}_{a_1} + a \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = 0.595 \angle -9.6^\circ (a^2 + a + 1) = 0$$

$$\tilde{I}_c = a \tilde{I}_{a_1} + a^2 \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = 0.595 \angle -9.6^\circ (a + a^2 + 1) = 0$$

Para calcular los voltajes al neutro en las tres fases, en el punto de falla, se calculan primero las componentes de secuencia positiva, negativa y cero del voltaje de la fase a

$$\tilde{V}_{a_1} = \tilde{E}_{a_1} - \tilde{Z}_{11} \tilde{I}_{a_1} = 0.95 - 0.0808 \angle 90^\circ \times 0.595 \angle -9.6^\circ = 0.943 \angle -2.9^\circ$$

$$\tilde{V}_{a_2} = -\tilde{Z}_{22} \tilde{I}_{a_2} = -0.0847 \angle 90^\circ \times 0.595 \angle -9.6^\circ = -0.0504 \angle 80.4^\circ$$

$$\tilde{\tilde{V}}_{a_0} = -\tilde{\tilde{Z}}_{00} \tilde{\tilde{I}}_{a_0} = -(1.575 + j0.010) 0.595 \angle -9.6^\circ = -0.939 \angle -5.9^\circ$$

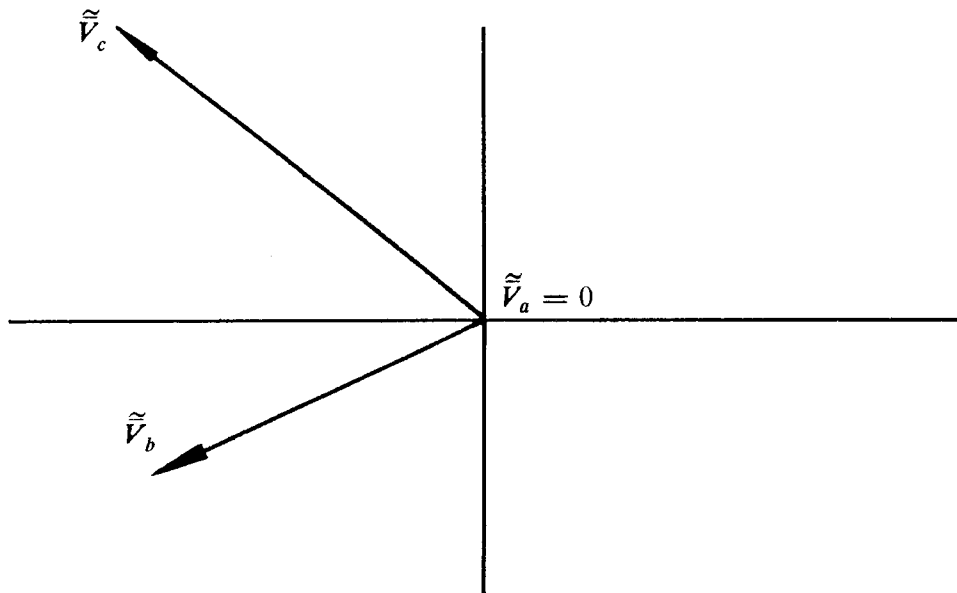
A partir de estos valores de secuencia positiva, negativa y cero se calculan los voltajes al neutro en las tres fases

$$\tilde{\tilde{V}}_a = \tilde{\tilde{V}}_{a_1} + \tilde{\tilde{V}}_{a_2} + \tilde{\tilde{V}}_{a_0} = 0.943 \angle -2.9^\circ - 0.0504 \angle 80.4^\circ - 0.939 \angle -5.9^\circ = 0$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{V}}_b &= a^2 \tilde{\tilde{V}}_{a_1} + a \tilde{\tilde{V}}_{a_2} + \tilde{\tilde{V}}_{a_0} \\ &= 1 \angle 240^\circ \times 0.943 \angle -2.9^\circ - 1 \angle 120^\circ \times 0.0503 \angle 80.4^\circ - 0.939 \angle -5.9^\circ \\ &= 1.553 \angle 205.8^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{V}}_c &= a \tilde{\tilde{V}}_{a_1} + a^2 \tilde{\tilde{V}}_{a_2} + \tilde{\tilde{V}}_{a_0} \\ &= 1 \angle 120^\circ \times 0.943 \angle -2.9^\circ - 1 \angle 240^\circ \times 0.0504 \angle 80.4^\circ - 0.939 \angle -5.9^\circ \\ &= 1.703 \angle 145.3^\circ \end{aligned}$$

En la siguiente figura se muestran gráficamente estos voltajes.



Nótese que en el punto de falla el voltaje al neutro de la fase a es cero. En las otras dos fases los voltajes respectivos se elevan a valores bastante mayores que los normales; refiriéndolos a la magnitud del voltaje que existía en el punto de falla antes de la falla, se tiene

$$\frac{V_b}{E_{a_1}} = \frac{1.553}{0.95} = 1.63$$

$$\frac{V_c}{E_{a_1}} = \frac{1.703}{0.95} = 1.79$$

5.2 Cálculo de las corrientes y los voltajes de distintos puntos de una red eléctrica afectada por un cortocircuito

En la primera parte de este capítulo se ha estudiado la manera de calcular las corrientes y los voltajes en el punto de falla. Se estudiará ahora el cálculo de las corrientes y voltajes en cualquier punto de un sistema en el que se ha producido un cortocircuito. Este estudio es necesario para determinar la capacidad interruptiva de los interruptores y la selección y ajustes de los relevadores de protección.

En el caso más general, las corrientes producidas por el cortocircuito se suman fasorialmente a las corrientes existentes inmediatamente antes del corto circuito, debidas a las cargas conectadas al sistema.

Frecuentemente es posible despreciar las corrientes de carga, ya que en general son mucho menores que las corrientes debidas al cortocircuito y están desfasadas con respecto a ellas casi noventa grados eléctricos, puesto que las corrientes de carga tienen un factor de potencia elevado, generalmente igual o superior al 85% y las corrientes de cortocircuito tienen un factor de potencia muy bajo, debido al efecto predominante de las reactancias inductivas de los elementos del sistema, que son mucho mayores que las resistencias correspondientes, sobre todo en la red de alta tensión.

En esta sección se expone el procedimiento general para calcular las corrientes y los voltajes en cualquier punto de un sistema afectado por un cortocircuito, sin recurrir a la simplificación mencionada, o sea considerando las corrientes totales constituidas por las corrientes de cortocircuito más las corrientes de carga. Este procedimiento se ilustrará mediante su aplicación al sistema descrito en el ejemplo 5.1.

EJEMPLO 5.3

Sea el sistema eléctrico descrito en el ejemplo 5.1 en el que se ha producido un cortocircuito a tierra en el punto F de la fase a . Las componentes simétricas de la corriente de falla de la fase y del voltaje al

neutro de la misma fase, en el punto de falla, ya se calcularon en el ejemplo 5.2 y esto permitió calcular las corrientes y los voltajes al neutro de las tres fases en el punto de falla.

Se trata ahora de calcular

- Corrientes y caídas de voltaje en las distintas ramas de los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero, que se muestran en la figura 5.15.
- A partir de los valores calculados en el inciso anterior determinar las corrientes y los voltajes por fase.

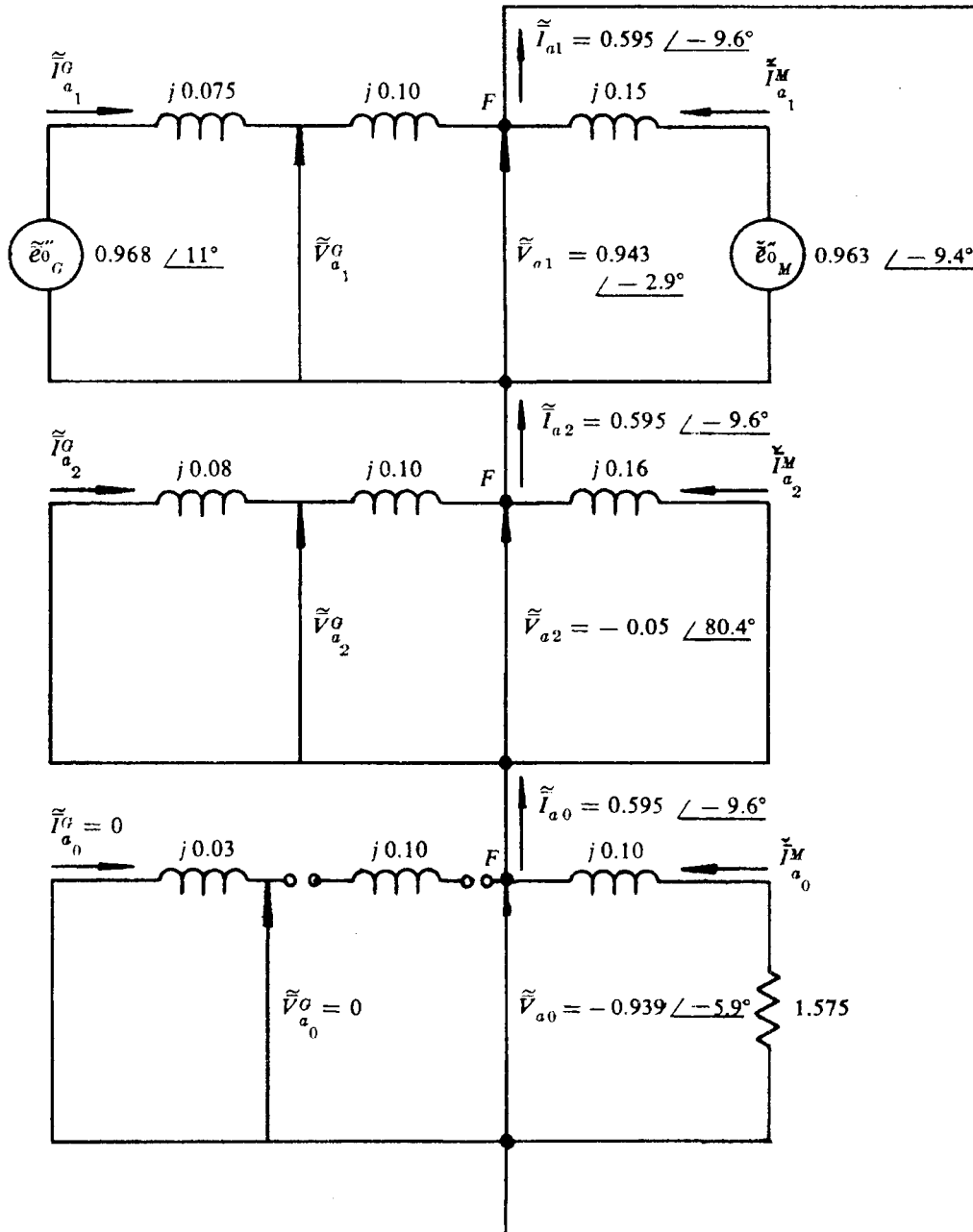


FIGURA 5.15 Corrientes y voltajes en distintos puntos de los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero del ejemplo 5.3

SOLUCIÓN

En los circuitos equivalentes de secuencia negativa y cero, que son circuitos pasivos, la corriente de falla se repartirá entre las ramas en proporción inversa a las impedancias

$$\tilde{I}_{a_2}^G = \frac{0.16}{0.18 + 0.16} \times 0.595 \angle -9.6^\circ = 0.280 \angle -9.6^\circ$$

$$\tilde{I}_{a_2}^M = \frac{0.18}{0.18 + 0.16} \times 0.595 \angle -9.6^\circ = 0.315 \angle -9.6^\circ$$

$$\tilde{I}_{a_0}^G = 0$$

$$\tilde{I}_{a_0}^M = 0.595 \angle -9.6^\circ$$

En el caso del circuito equivalente de secuencia positiva, que es un circuito activo, el cálculo resulta más complicado debido a la presencia de las fuerzas electromotrices $\tilde{e}_{0G}''$ y $\tilde{e}_{0M}''$. Un procedimiento para determinar las corrientes en las distintas ramas de ese circuito equivalente es establecer las ecuaciones de las mallas para el circuito de la figura 5.16 y resolver esas ecuaciones para las corrientes de malla.

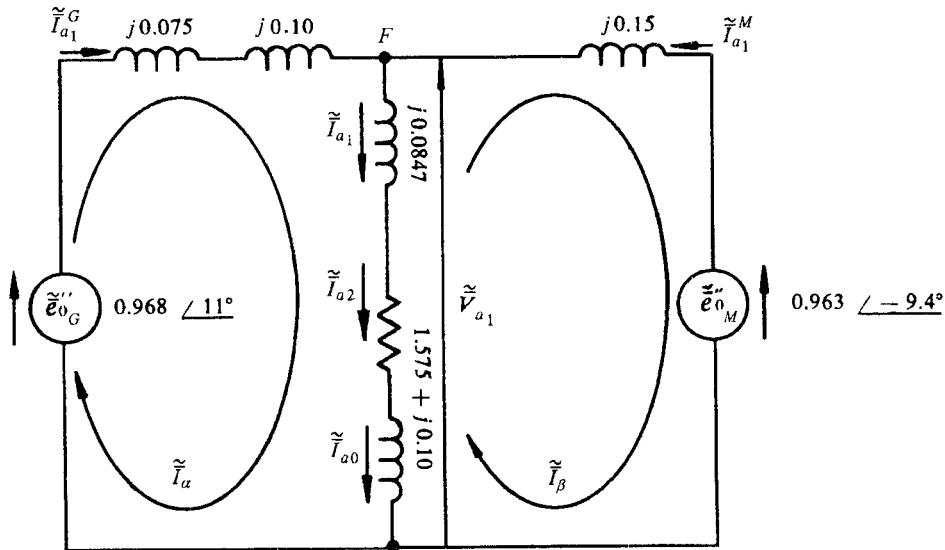


FIGURA 5.16 Circuito equivalente de secuencia positiva correspondiente al ejemplo 5.3, con las impedancias equivalentes de secuencia negativa y cero conectadas en el punto de falla

a) Cálculo de las corrientes y caídas de voltaje en las distintas ramas de los circuitos equivalentes

- Determinación de las corrientes de secuencia positiva resolviendo las ecuaciones de las mallas

En el circuito con dos mallas de la figura 5.16 puede establecerse el siguiente sistema de dos ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned}(1.575 + j0.3598) \tilde{\tilde{I}}_a - (1.575 + j0.1848) \tilde{\tilde{I}}_\beta &= 0.968 \angle 11^\circ \\ -(1.575 + j0.1848) \tilde{\tilde{I}}_a + (1.575 + j0.3348) \tilde{\tilde{I}}_\beta &= 0.963 \angle -9.4^\circ\end{aligned}$$

Expresando las impedancias propias y mutuas en forma polar, las dos ecuaciones quedan

$$\begin{aligned}1.616 \angle 12.9^\circ \tilde{\tilde{I}}_a - 1.586 \angle 6.7^\circ \tilde{\tilde{I}}_\beta &= 0.968 \angle 11^\circ \\ -1.586 \angle 6.7^\circ \tilde{\tilde{I}}_a + 1.610 \angle 12.0^\circ \tilde{\tilde{I}}_\beta &= -0.963 \angle -9.4^\circ\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por determinantes

$$\tilde{\tilde{I}}_a = \frac{\begin{vmatrix} 0.968 \angle 11^\circ & -1.586 \angle 6.7^\circ \\ -0.963 \angle -9.4^\circ & 1.610 \angle 12.0^\circ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.616 \angle 12.9^\circ & -1.586 \angle 6.7^\circ \\ -1.586 \angle 6.7^\circ & 1.610 \angle 12.0^\circ \end{vmatrix}} = \frac{0.687 \angle 97.5^\circ}{0.519 \angle 99.5^\circ} = 1.324 \angle -2.0^\circ$$

$$\tilde{\tilde{I}}_\beta = \frac{\begin{vmatrix} 1.616 \angle 12.9^\circ & 0.968 \angle 11^\circ \\ -1.586 \angle -6.7^\circ & 0.963 \angle -9.4^\circ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.616 \angle 12.9^\circ & -1.586 \angle 6.7^\circ \\ -1.586 \angle 6.7^\circ & 1.610 \angle 12.0^\circ \end{vmatrix}} = \frac{0.383 \angle 103.6^\circ}{0.519 \angle 99.5^\circ} = 0.738 \angle -4.1^\circ$$

$$\tilde{\tilde{I}}_{a_1}^G = \tilde{\tilde{I}}_a = 1.324 \angle -2.0^\circ$$

$$\tilde{\tilde{I}}_{a_1}^M = -\tilde{\tilde{I}}_\beta = -0.738 \angle 4.1^\circ$$

Estas corrientes corresponden a las corrientes en la fase *a* del generador y del motor durante la falla, incluyendo tanto la corriente debida a la carga como la aportación al cortocircuito.

La corriente de secuencia positiva en el punto de falla es

$$\tilde{I}_{a_1} = \tilde{I}_a - \tilde{I}_\beta = 1.324 \angle -2.0^\circ - 0.738 \angle 4.1^\circ = 0.595 \angle -9.6^\circ$$

que es el mismo valor que el calculado anteriormente haciendo uso del teorema de Thevenin.

- Determinación de las corrientes de secuencia positiva aplicando el teorema de la superposición

La determinación de las corrientes de secuencia positiva puede simplificarse observando que el circuito de la figura 5.16 puede considerarse como el resultado de superponer los circuitos a) y b) de la figura 5.17.

El circuito a) de la figura 5.17 representa las condiciones de funcionamiento normal del sistema inmediatamente antes de ocurrir la falla (condiciones que se determinaron en el ejemplo 5.1). $\tilde{E}_{A1}$ es el voltaje al neutro de la fase a , en por unidad, en el punto de falla, antes de producirse ésta, e $\tilde{I}_{A1}$ es la corriente que circulaba por la fase a antes de ocurrir la falla. Se trata de cantidades exclusivamente de secuencia positiva, ya que se supone que el sistema trifásico estaba funcionando normalmente con las corrientes y voltajes equilibrados y por tanto no había corrientes ni voltajes de secuencia negativa ni de secuencia cero.

El circuito b) de la figura 5.17 representa las condiciones debidas exclusivamente a la falla y permite calcular las corrientes de secuencia positiva producidas por el cortocircuito.

La suma fasorial de las corrientes de secuencia positiva debidas a la carga conectada, que aparecen en el circuito a) y de las corrientes de secuencia positiva debidas al cortocircuito, que aparecen en el circuito b), da las corrientes totales de secuencia positiva en las diferentes ramas del circuito. Lo anterior se ilustra aplicándolo al caso del ejemplo 5.3. Como se calculó anteriormente y se muestra en la figura 5.15.

$$\tilde{V}_{a_1} = 0.943 \angle -2.9^\circ$$

La fuente de voltaje del circuito de la figura 5.17b tiene el siguiente valor:

$$\tilde{E}_{a_1} - \tilde{V}_{a_1} = 0.95 \angle 0^\circ - 0.943 \angle -2.9^\circ = 0.048 \angle 80.4^\circ$$

Contribución del generador a la componente de secuencia positiva de la corriente de cortocircuito

$$\tilde{I}'_{a_1} = \frac{0.048 \angle 80.4^\circ}{0.175 \angle 90^\circ} = 0.274 \angle -9.6^\circ$$

Contribución del motor a la componente de secuencia positiva de la corriente de cortocircuito

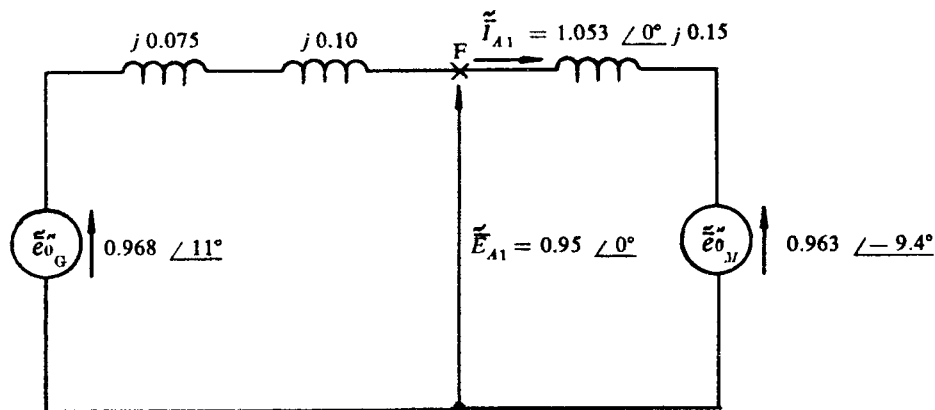
$$\tilde{I}''_{a_1} = \frac{0.048 \angle 80.4^\circ}{0.15 \angle 90^\circ} = 0.32 \angle -9.6^\circ$$

Corriente de secuencia positiva de la fase a en el punto de falla

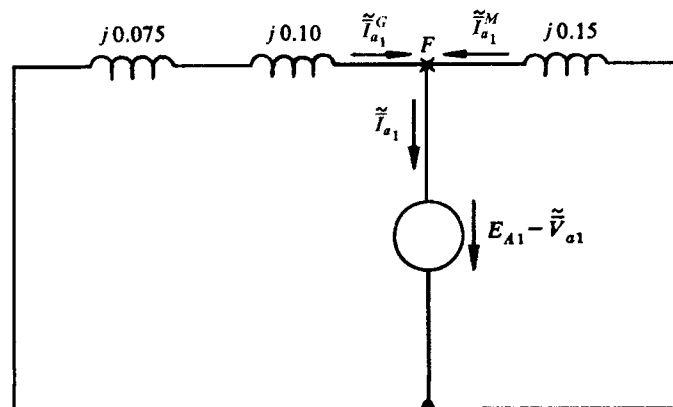
$$\tilde{I}_{a_1} = \tilde{I}'_{a_1} + \tilde{I}''_{a_1} = 0.594 \angle -9.6^\circ$$

que es igual al valor encontrado anteriormente.

Las corrientes totales de secuencia positiva de la fase a del generador y del motor, debidas a las condiciones de carga existentes antes del cortocircuito, más las corrientes producidas por el cortocircuito se obtienen superponiendo los circuitos a) y b) de la figura 5.17.



a) Corrientes y voltajes de secuencia positiva existentes antes de ocurrir la falla



b) Contribución del cortocircuito a las corrientes de secuencia positiva

FIGURA 5.17 Aplicación del teorema de la superposición para determinar las corrientes totales de secuencia positiva

$$\tilde{I}_{a_1}^G = \tilde{I}_{A_1} + \tilde{I}'_{a_1} = 1.053 \angle 0^\circ + 0.274 \angle -9.6^\circ = 1.32 \angle -2.0^\circ$$

$$\tilde{I}_{a_1}^M = -\tilde{I}_{A_1} + \tilde{I}'_{a_1} = -1.053 \angle 0^\circ + 0.320 \angle -9.6^\circ = -0.739 \angle 4.1^\circ$$

Como comprobación puede notarse que estos valores son iguales a los calculados mediante la aplicación de las ecuaciones de las mallas en el circuito de la figura 5.16.

b) Cálculo de las corrientes y voltajes por fase

- Cálculo de las corrientes de fase en las tres fases del generador, durante la falla

Se parte de los siguientes valores calculados anteriormente:

$$\tilde{I}_{a_1}^G = 1.053 \angle 0^\circ + 0.27 \angle -9.6^\circ = 1.322 \angle -20^\circ$$

$$\tilde{I}_{a_2}^G = 0.280 \angle -9.6^\circ$$

$$\tilde{I}_{a_0}^G = 0$$

Corrientes por fase en el generador, en por unidad

$$\begin{aligned}\tilde{I}_a^G &= \tilde{I}_{a_1}^G + \tilde{I}_{a_2}^G + \tilde{I}_{a_0}^G \\ &= 1.324 \angle -2.0^\circ + 0.280 \angle -9.6^\circ + 0 \\ &= 1.600 \angle -3.3^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{I}_b^G &= a^2 \tilde{I}_{a_1}^G + a \tilde{I}_{a_2}^G + \tilde{I}_{a_0}^G \\ &= (1 \angle 240^\circ)(1.324 \angle -2.0^\circ) + (1 \angle 120^\circ)(0.280 \angle -9.6^\circ) + 0 \\ &= 1.173 \angle 227.2^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{I}_c^G &= a \tilde{I}_{a_1}^G + a^2 \tilde{I}_{a_2}^G + \tilde{I}_{a_0}^G \\ &= (1 \angle 120^\circ)(1.324 \angle -2.0^\circ) + (1 \angle 240^\circ)(0.280 \angle -9.6^\circ) + 0 \\ &= 1.244 \angle 129.9^\circ\end{aligned}$$

Corrientes por fase en el generador, en amperes

La base de corriente del lado del generador es

$$I_{B_p} = \frac{25\,000}{13.8\sqrt{3}} = 1\,046\text{ A}$$

$$\tilde{I}_a^G = 1\,046 \times 1.600 \angle -3.3^\circ = 1\,674 \angle -3.3^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_b^G = 1\,046 \times 1.173 \angle -227.2^\circ = 1\,277 \angle 227.2^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_c^G = 1\,046 \times 1.244 \angle 129.9^\circ = 1\,301 \angle 129.9^\circ \text{ A}$$

La corriente en el neutro del generador es igual a cero

$$\tilde{I}_n^G = \tilde{I}_a^G + \tilde{I}_b^G + \tilde{I}_c^G = 0$$

Esto se debe a la conexión delta/delta del transformador, lo que hace que el circuito de secuencia cero del mismo quede en circuito abierto e impida la aportación del generador a la corriente de cortocircuito para una falla en el punto F .

– Cálculo de las corrientes de fase en las tres fases del motor, durante la falla

Se parte de los siguientes valores, calculados anteriormente:

$$\tilde{\tilde{I}}_{a_1}^M = -1.053 \angle 0^\circ + 0.320 \angle -9.6^\circ = -0.739 \angle 4.1^\circ$$

$$\tilde{\tilde{I}}_{a_2}^M = 0.315 \angle -9.6^\circ$$

$$\tilde{\tilde{I}}_{a_0}^M = 0.595 \angle -9.6^\circ$$

Corrientes por fase, en por unidad

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{I}}_a^M &= \tilde{\tilde{I}}_{a_1}^M + \tilde{\tilde{I}}_{a_2}^M + \tilde{\tilde{I}}_{a_0}^M \\ &= -0.739 \angle 4.1^\circ + 0.315 \angle -9.6^\circ + 0.595 \angle -9.6^\circ \\ &= 0.2595 \angle -53.2^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{I}_b^M &= a^2 \tilde{I}_{a_1}^M + a \tilde{I}_{a_2}^M + \tilde{I}_{a_0}^M \\ &= (1 \angle 240^\circ)(0.74 \angle 4.1^\circ) + (1 \angle 120^\circ)(0.315 \angle -9.6^\circ) + 0.595 \angle -9.6^\circ \\ &= 1.175 \angle 47.1^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{I}_c^M &= a \tilde{I}_{a_1}^M + a^2 \tilde{I}_{a_2}^M + \tilde{I}_{a_0}^M \\ &= (1 \angle 120^\circ)(0.74 \angle 4.1^\circ) + (1 \angle 240^\circ)(0.315 \angle -9.6^\circ) + 0.591 \angle -9.6^\circ \\ &= 1.2456 \angle -49.96^\circ\end{aligned}$$

Corriente en el neutro del motor, en por unidad

$$\begin{aligned}\tilde{I}_n^M &= \tilde{I}_a^M + \tilde{I}_b^M + \tilde{I}_c^M \\ &= 0.2595 \angle -53.2^\circ + 1.175 \angle 47.2^\circ + 1.2456 \angle -49.96^\circ \\ &= 1.78 \angle -9.6^\circ\end{aligned}$$

Nótese que este valor es igual al de la corriente en el punto de falla F , ya que debido a la conexión del transformador toda la corriente de falla regresa por el neutro del motor.

Corrientes por fase y en el neutro del motor, en amperes

La base de corriente del lado del motor es

$$I_{B_8} = \frac{25\,000}{6.9\sqrt{3}} = 2\,092\text{ A}$$

$$\tilde{I}_a^M = 2\,092 \times 0.2595 \angle -53.2^\circ = 543 \angle -53.2^\circ\text{ A}$$

$$\tilde{I}_b^M = 2\,092 \times 1.175 \angle 47.2^\circ = 2\,458 \angle 47.2^\circ\text{ A}$$

$$\tilde{I}_c^M = 2\,092 \times 1.246 \angle -50.1^\circ = 2\,607 \angle -50.1^\circ\text{ A}$$

$$\tilde{I}_n^M = 2\,092 \times 1.78 \angle -9.6^\circ = 3\,724 \angle -9.6^\circ\text{ A}$$

– Voltajes a tierra en las terminales del generador durante la falla

Se parte de los valores de las componentes simétricas del voltaje de la fase a en el punto de falla, calculados en el ejemplo 5.2.

$$\widetilde{\widetilde{V}}_{a_1}^F = 0.943 \angle -2.9^\circ$$

$$\widetilde{\widetilde{V}}_{a_2}^F = -0.050 \angle 80.4^\circ$$

$$\widetilde{\widetilde{V}}_{a_0}^F = -0.939 \angle -5.9^\circ$$

A cada uno de estos voltajes de secuencia positiva, negativa y cero se le suman las caídas de voltaje entre las terminales del generador y el punto de falla debidas a la circulación de la corriente de la misma secuencia en el circuito equivalente respectivo, para obtener las componentes simétricas del voltaje al neutro en las terminales de la fase a del generador.

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{V}}_{a_1}^G &= \widetilde{\widetilde{V}}_{a_1}^F + \widetilde{\widetilde{I}}_{a_1}^G \overline{X}_{T_1} \\ &= 0.943 \angle -2.9^\circ + 1.324 \angle -2.0^\circ \times 0.10 \angle 90^\circ \\ &= 0.950 \angle 5.1^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{V}}_{a_2}^G &= \widetilde{\widetilde{V}}_{a_2}^F + \widetilde{\widetilde{I}}_{a_2}^G \overline{X}_{T_2} \\ &= -0.050 \angle 80.4^\circ + 0.280 \angle 9.6^\circ \times 0.10 \angle 90^\circ \\ &= -0.0222 \angle 80.4^\circ \\ &= 0.0222 \angle 260.4^\circ\end{aligned}$$

$$\widetilde{\widetilde{V}}_{a_0}^G = 0$$

Debido a la conexión delta/delta del transformador no existen ni corrientes ni voltajes de secuencia cero del lado del generador para una falla a tierra en las terminales del motor.

A partir de sus componentes simétricas se calculan los voltajes a tierra en las terminales del generador, correspondientes a cada una de las tres fases

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{V}}_a^G &= \widetilde{\widetilde{V}}_{a_1}^G + \widetilde{\widetilde{V}}_{a_2}^G + \widetilde{\widetilde{V}}_{a_0}^G \\ &= 0.950 \angle 5.1^\circ + 0.0222 \angle 260.4^\circ + 0 \\ &= 0.945 \angle 3.8^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{V}}_b^G &= a^2 \widetilde{\widetilde{V}}_{a_1}^G + a \widetilde{\widetilde{V}}_{a_2}^G + \widetilde{\widetilde{V}}_{a_0}^G \\ &= 1 \angle 240^\circ \times 0.950 \angle 5.1^\circ + 1 \angle 120^\circ \times 0.0222 \angle 260.4^\circ + 0 \\ &= 0.934 \angle 246.1^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\bar{V}}_c^G &= a \widetilde{\bar{V}}_{a_1}^G + a^2 \widetilde{\bar{V}}_{a_2}^G + \widetilde{\bar{V}}_{a_0}^G \\ &= 1 \angle 120^\circ \times 0.950 \angle 5.1^\circ + 1 \angle 240^\circ \times 0.0222 \angle 260.4^\circ \\ &= 0.971 \angle 125.4^\circ\end{aligned}$$

La base de voltaje al neutro del lado del generador es

$$V_{B_p} = \frac{13.8}{\sqrt{3}} = 7.967 \text{ kV}$$

Los voltajes a tierra en volts en las terminales del generador son

$$\begin{aligned}\widetilde{\bar{V}}_a^G &= 7.967 \times 0.945 \angle 3.8^\circ = 7.529 \angle 3.8^\circ \\ \widetilde{\bar{V}}_b^G &= 7.967 \times 0.934 \angle 246.1^\circ = 7.442 \angle 246.1^\circ \\ \widetilde{\bar{V}}_c^G &= 7.967 \times 0.971 \angle 125.4^\circ = 7.736 \angle 125.4^\circ\end{aligned}$$

El neutro del generador está al potencial de tierra, ya que no hay ninguna impedancia intercalada en la conexión del neutro a tierra ni circula ninguna corriente por esa conexión durante la falla.

– Voltajes a tierra en las terminales del motor durante la falla

Como la falla monofásica a tierra ocurre en la terminal de la fase a del motor, los voltajes a tierra en las terminales de las tres fases del motor son los voltajes a tierra en el punto de falla, calculados en el ejemplo 5.2:

$$\begin{aligned}\widetilde{\bar{V}}_a^M &= 0 \\ \widetilde{\bar{V}}_b^M &= 1.553 \angle 205.8^\circ \\ \widetilde{\bar{V}}_c^M &= 1.703 \angle 145.3^\circ\end{aligned}$$

El voltaje a tierra en el punto neutro del motor alcanza el valor de

$$\widetilde{\bar{V}}_n^M = 3R\widetilde{\bar{I}}_{a_0} = 1.575 \times 0.594 \angle -9.6^\circ = 0.936 \angle -9.6^\circ$$

La base de voltaje al neutro del lado del generador es

$$V_{B_8} = \frac{6.9}{\sqrt{3}} = 3.984 \text{ kV}$$

Los voltajes a tierra en volts en las terminales del motor son

$$\tilde{V}_a^M = 3.984 \times 0 = 0$$

$$\tilde{V}_b^M = 3.984 \times 1.553 \angle 206^\circ = 6.187 \angle 206^\circ$$

$$\tilde{V}_c^M = 3.984 \times 1.703 \angle 145.3^\circ = 6.785 \angle 145.3^\circ$$

$$\tilde{V}_n^M = 3.984 \times 0.936 \angle -9.6^\circ = 3.729 \angle -9.6^\circ$$

- Cálculo de las corrientes en las tres fases del sistema, durante la falla, aplicando el teorema de la superposición

Otra forma de calcular las corrientes de fase en el sistema, durante la falla, es superponer a las corrientes que existían inmediatamente antes de la falla, que se indican en la figura 5.18a, las corrientes debidas exclusivamente a la falla, mostradas en la figura 5.18b, para obtener las corrientes totales durante la falla que aparecen en la figura 5.18c.

Las corrientes que existían inmediatamente antes de la falla, que se calcularon en el ejemplo 5.1, expresadas en por unidad y en amperes, son las siguientes:

Corrientes que salen del generador

$$\tilde{I}_{A_1}^G = 1.053 \angle 0^\circ$$

$$\tilde{I}_{A_1}^G = 1 \ 101 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{B_1}^G = 1.053 \angle 240^\circ$$

$$\tilde{I}_{B_1}^G = 1 \ 101 \angle 240^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{C_1}^G = 1.053 \angle 120^\circ$$

$$\tilde{I}_{C_1}^G = 1 \ 101 \angle 120^\circ \text{ A}$$

Corrientes que entran al motor

$$\tilde{I}_{A_1}^M = 1.053 \angle 0^\circ$$

$$\tilde{I}_{A_1}^M = 2 \ 202 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{B_1}^M = 1.053 \angle 240^\circ$$

$$\tilde{I}_{B_1}^M = 2 \ 202 \angle 240^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{C_1}^M = 1.053 \angle 120^\circ$$

$$\tilde{I}_{C_1}^M = 2 \ 202 \angle 120^\circ \text{ A}$$

Las corrientes en las tres fases del generador, debidas exclusivamente a su contribución a la falla, pueden calcularse a partir de las componentes de secuencia positiva, negativa y cero de la corriente de la fase a del generador debida a la falla, que se determinaron anteriormente:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_b^G &= \tilde{I}_{a_1}^G + \tilde{I}_{a_2}^G + \tilde{I}_{a_0}^G \\ &= 0.273 \angle -9.6^\circ + 0.278 \angle -9.6^\circ + 0 \\ &= 0.551 \angle -9.6^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{I}_b^G &= a^2 \tilde{I}_{a_1}^G + a \tilde{I}_{a_2}^G + \tilde{I}_{a_0}^G \\ &= 1 \angle 240^\circ \times 0.273 \angle -9.6^\circ + 1 \angle 120^\circ \times 0.278 \angle -9.6^\circ + 0 \\ &= 0.276 \angle 169.4^\circ = -0.276 \angle -10.5^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{I}_a^G &= a \tilde{I}_{a_1}^G + a^2 \tilde{I}_{a_2}^G + \tilde{I}_{a_0}^G \\ &= 1 \angle 120^\circ \times 0.273 \angle -9.6^\circ + \angle 240^\circ \times 0.278 \angle -9.6^\circ + 0 \\ &= 0.276 \angle 171.3^\circ = -0.276 \angle -8.7^\circ\end{aligned}$$

Las corrientes en amperes en las tres fases del generador, debidas exclusivamente a la falla, se obtienen multiplicando esos valores, en por unidad, por la base de corriente correspondiente, cuya magnitud es de 1 046 A.

$$\begin{aligned}\tilde{I}_a^G &= 1\,046 \times 0.551 \angle -9.6^\circ = 576 \angle -9.6^\circ \text{ A} \\ \tilde{I}_b^G &= 1\,046 (-0.276 \angle -10.5^\circ) = -288 \angle -10.5^\circ \text{ A} \\ \tilde{I}_c^G &= 1\,046 (-0.276 \angle -8.7^\circ) = -288 \angle -8.7^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Nótese que la suma de estas tres corrientes es igual a cero, lo que sirve de comprobación al cálculo, ya que por el neutro del generador no puede circular ninguna corriente para el caso de una falla a tierra en el punto F , debido a la conexión delta/delta del transformador.

En forma similar se calculan las corrientes en las tres fases del motor, debidas exclusivamente a su contribución a la falla, partiendo de las componentes de secuencia positiva, negativa y cero de la corriente de la fase a del motor debida a la falla, determinadas anteriormente.

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_a^M &= \tilde{I}_{a_1}^M + \tilde{I}_{a_2}^M + \tilde{I}_{a_0}^M \\
&= 0.320 \angle -9.6^\circ + 0.315 \angle -9.6^\circ + 0.595 \angle -9.6^\circ \\
&= 1.230 \angle -9.6^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_b^M &= a^2 \tilde{I}_{a_1}^M + a \tilde{I}_{a_2}^M + \tilde{I}_{a_0}^M \\
&= 1 \angle 240^\circ + 0.320 \angle -9.6^\circ + 1 \angle 120^\circ \times 0.315 \angle -9.6^\circ + 0.595 \angle -9.6^\circ \\
&= 0.276 \angle -11.3^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_c^M &= a \tilde{I}_{a_1}^M + a^2 \tilde{I}_{a_2}^M + \tilde{I}_{a_0}^M \\
&= 1 \angle 120^\circ \times 0.320 \angle -9.6^\circ + 1 \angle 240^\circ \times 0.315 \angle -9.6^\circ + 0.595 \angle -9.6^\circ \\
&= 0.276 \angle -7.8^\circ
\end{aligned}$$

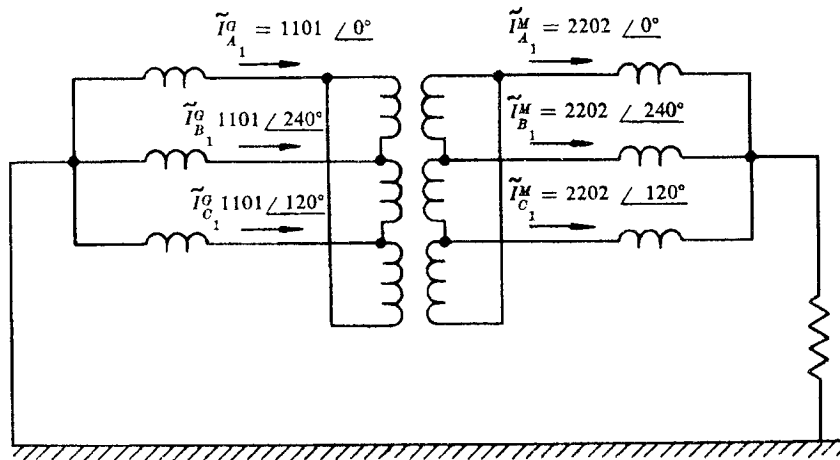
Las corrientes, en amperes, correspondientes a los valores anteriores, en por unidad, se obtienen multiplicando esos valores por la base de corriente correspondiente, cuya magnitud es de 2 092 amperes.

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_a^M &= 2\,092 \times 1.230 \angle -9.6^\circ = 2\,573 \angle -9.6^\circ \text{ A} \\
\tilde{I}_b^M &= 2\,092 \times 0.276 \angle -11.3^\circ = 577 \angle -11.3^\circ \text{ A} \\
\tilde{I}_c^M &= 2\,092 \times 0.276 \angle -7.8^\circ = 577 \angle -7.8^\circ \text{ A}
\end{aligned}$$

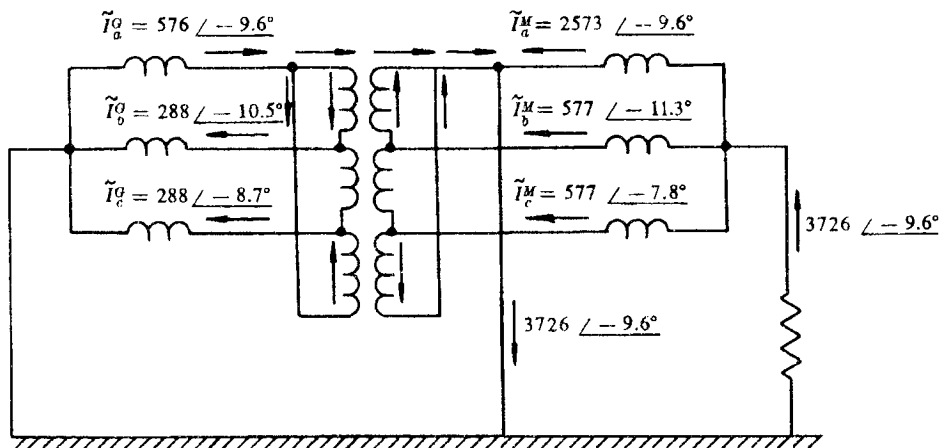
La corriente en el neutro del motor es

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_n^M &= \tilde{I}_a^M + \tilde{I}_b^M + \tilde{I}_c^M \\
&= 2556 \angle -9.6^\circ + 577 \angle -11.3^\circ + 577 \angle -7.8^\circ \\
&= 3726 \angle -9.6^\circ
\end{aligned}$$

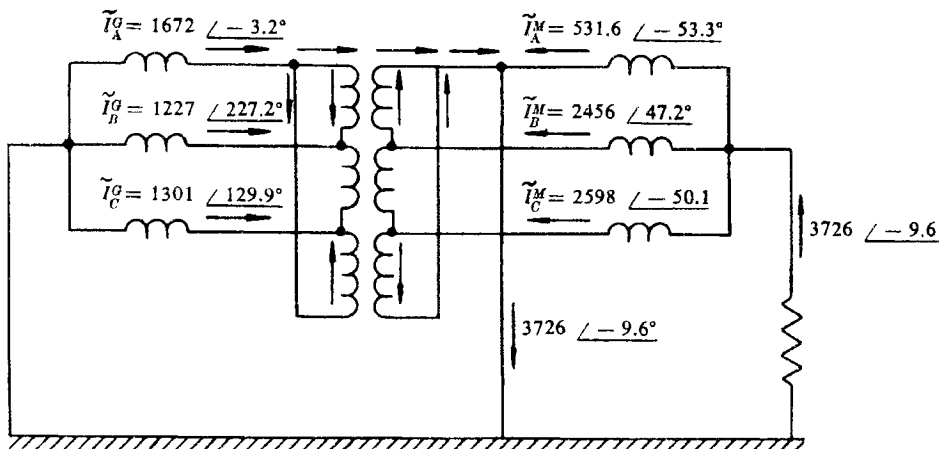
Nótese que la corriente que circula por el neutro del motor es igual a la corriente de falla, lo que sirve de comprobación, ya que debido a la conexión delta/delta del transformador toda la corriente de falla regresa por el neutro del motor.



a) Corrientes existentes inmediatamente antes de la falla



b) Corrientes debidas exclusivamente a la falla



c) Corrientes totales durante la falla

FIGURA 5.18 Cálculo de las corrientes en las tres fases del sistema, durante la falla, aplicando el teorema de la superposición

Las corrientes totales existentes durante la falla se obtienen superponiendo a las corrientes existentes inmediatamente antes de la falla, mostradas en la figura 5.18a, las corrientes debidas exclusivamente a la falla, que aparecen en la figura 5.18b.

Para las tres fases del generador

$$\tilde{I}_A^G = 1\,101 \angle 0^\circ + 576 \angle -9.6^\circ = 1\,672 \angle -3.2^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_B^G = 1\,101 \angle 240^\circ - 288 \angle -10.5^\circ = 1\,227 \angle 227.2^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_C^G = 1\,101 \angle 120^\circ - 288 \angle -8.7^\circ = 1\,301 \angle 129.9^\circ \text{ A}$$

Para las tres fases del motor

$$\tilde{I}_A^M = 2\,202 \angle 0^\circ - 556 \angle -9.6^\circ = -531.6 \angle -53.3^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_B^M = 2\,202 \angle 240^\circ - 577 \angle -10.5^\circ = 2\,456 \angle 47.2^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_C^M = 2\,202 \angle 120^\circ - 577 \angle -8.5^\circ = 2\,598 \angle -50.1^\circ \text{ A}$$

5.3 Método simplificado para el cálculo de cortocircuitos

En muchos casos es posible hacer una serie de simplificaciones que facilitan el cálculo de cortocircuitos. A continuación se mencionan las más usuales:

1. Se desprecian las corrientes debidas a las cargas y cualquier otra corriente existente antes de producirse el cortocircuito.
2. Se supone que todos los voltajes existentes antes de producirse el cortocircuito están en fase, ya que el punto anterior implica que antes de la falla no circula ninguna corriente por el sistema.

3. Si no se conoce la magnitud de los voltajes que existen en los distintos puntos del sistema antes de ocurrir el cortocircuito puede suponerse que sus valores, en por unidad, son iguales a uno, referidos a bases de voltaje correspondientes a los voltajes nominales del sistema.
4. Con respecto a las impedancias del sistema suelen hacerse las siguientes simplificaciones: frecuentemente es posible despreciar la resistencia de los diferentes elementos del sistema y considerar únicamente las reactancias inductivas, especialmente en los sistemas de alta tensión; las impedancias de secuencia positiva y negativa del sistema pueden considerarse iguales; la impedancia de falla se toma igual a cero ya que para esta condición se tienen el valor más alto de la corriente de falla.

Las suposiciones anteriores conducen, en general, a obtener valores de las corrientes de cortocircuito un poco mayores que los reales.

Más adelante se analizan algunos casos en que pueden aplicarse estas simplificaciones.

5.4 Potencia de cortocircuito

Se define la potencia de cortocircuito como el producto de la magnitud de la corriente de cortocircuito por la magnitud del voltaje entre líneas nominal del sistema y por la raíz cuadrada de tres.

Por ejemplo, en el caso de un cortocircuito trifásico en el que la corriente de cortocircuito tenga una magnitud de $I_{CC3\phi}$, la potencia de cortocircuito trifásico es, por definición

$$S_{CC3\phi} = \sqrt{3} V_l I_{CC3\phi}$$

Para un cortocircuito monofásico con una corriente de magnitud $I_{CC1\phi}$, la potencia del cortocircuito monofásico es, por definición

$$S_{CC1\phi} = \sqrt{3} V_l I_{CC1\phi}$$

Aunque el valor de la corriente de cortocircuito representa en forma más directa el fenómeno físico del cortocircuito, es usual expresar la magnitud del cortocircuito en un punto de un sistema interconectado mediante la potencia de cortocircuito resultante en ese punto, calculada de acuerdo con la definición anterior y expresada en kVA o en MVA.

5.5 Impedancias equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero de un sistema eléctrico

Partiendo del valor conocido de la potencia de cortocircuito trifásico $S_{CC3\phi}$ en un punto determinado de un sistema eléctrico, puede calcularse la impedancia equivalente de secuencia positiva $\bar{X}_{s1}$ del sistema, en por unidad, referida a una base de potencia trifásica $S_{B3\phi}$ y a una base de voltaje entre líneas igual al voltaje entre líneas nominal del sistema, mediante la siguiente expresión:

$$\bar{X}_{s1} = \frac{S_{B3\phi}}{S_{CC3\phi}}$$

La justificación de esta expresión es como sigue:

De acuerdo con la definición de potencia de cortocircuito trifásico, la magnitud de la corriente de cortocircuito en cada fase está dada por la siguiente expresión:

$$I_{CC3\phi} = \frac{S_{CC3\phi}}{V_l \sqrt{3}}$$

La base de corriente correspondiente a una base de potencia trifásica $S_{B3\phi}$ y a una base de voltaje entre líneas V_{Bl} igual al voltaje entre líneas nominal del sistema V_l , es:

$$I_B = \frac{S_{B3\phi}}{V_{Bl} \sqrt{3}}$$

Por tanto, la corriente de cortocircuito, en por unidad, es igual a

$$\bar{I}_{CC3\phi} = \frac{I_{CC3\phi}}{I_B} = \frac{S_{CC3\phi} / V_l \sqrt{3}}{S_{B3\phi} / V_{Bl} \sqrt{3}}$$

y como $V_{Bl} = V_l$

entonces

$$\bar{I}_{CC3\phi} = \frac{S_{CC3\phi}}{S_{B3\phi}}$$

Por otra parte la corriente por fase, para el caso de un cortocircuito trifásico, es igual, aplicando el teorema de Thevenin, al voltaje que existía en el punto de falla antes de producirse el cortocircuito, dividido por la impedancia del sistema vista desde el punto de falla X_{s1} . Si se supone que el voltaje existente antes de ocurrir la falla era igual al voltaje nominal del sistema o sea en por unidad igual a 1

$$\bar{I}_{CC3\phi} = \frac{S_{CC3\phi}}{S_{B3\phi}} = \frac{1}{\bar{X}_{s1}}$$

donde $\bar{X}_{s1}$ es la impedancia equivalente de secuencia positiva del sistema, expresada en por unidad.

Despejando de la expresión anterior $\bar{X}_{s1}$

$$\bar{X}_{s1} = \frac{S_{B3\phi}}{S_{CC3\phi}}$$

como se quería demostrar.

La impedancia equivalente de secuencia negativa del sistema se considera igual a la de secuencia positiva.

$$\bar{X}_{s2} = \bar{X}_{s1}$$

Si además del valor de la potencia de cortocircuito trifásico en un punto determinado de un sistema eléctrico se conoce el valor de la potencia de cortocircuito monofásico $S_{CC1\phi}$, la impedancia equivalente de secuencia cero del sistema, vista desde ese punto, puede determinarse como a continuación se describe.

De acuerdo con la definición de potencia de cortocircuito monofásico, la corriente de cortocircuito monofásico está dada por

$$I_{CC1\phi} = \frac{S_{CC1\phi}}{V_l\sqrt{3}}$$

Dividiendo este valor por la base de corriente correspondiente se obtiene la corriente de cortocircuito monofásico en por unidad

$$\bar{I}_{CC1\phi} = \frac{S_{CC1\phi}/V_l\sqrt{3}}{S_{B_3}/V_{B_l}\sqrt{3}}$$

y como $V_{B_l} = V_l$

$$\bar{I}_{CC1} = \frac{S_{CC1\phi}}{S_{B_3\phi}}$$

Por otra parte, la corriente de cortocircuito monofásico en el punto del sistema considerado está dada por la siguiente expresión:

$$\bar{I}_{CC1} = \frac{1}{2X_{s1} + X_{s0}}$$

donde el voltaje, en por unidad, existente en el punto de falla antes de ocurrir el cortocircuito monofásico a tierra se está considerando igual a 1.

Igualando las dos expresiones en por unidad

$$\bar{I}_{CC1\phi} = \frac{1}{2X_{s1} + X_{s0}} = \frac{S_{CC1\phi}}{S_{B_3\phi}}$$

Despejando la impedancia equivalente de secuencia cero del sistema

$$X_{s0} = \frac{S_{B_3\phi}}{S_{CC1\phi}} - 2X_{s1}$$

5.6 Cálculo de la magnitud de las corrientes de cortocircuito en los sistemas de distribución

Los sistemas de distribución eléctrica tienen frecuentemente una disposición radial a partir de la subestación que los alimenta. Esto facilita limitar la magnitud de las corrientes de cortocircuito en los alimentadores de distribución a valores relativamente bajos mediante la elección adecuada de la impedancia de cortocircuito de los transformadores de las subestaciones de distribución, del tipo de conexión trifásica de dichos transformadores y de la forma de conexión de los neutros. Esta limitación de las corrientes de cortocircuito permite utilizar equipo de interrupción más sencillo y más económico, tanto en el sistema de distribución de la empresa suministradora como en las instalaciones de los usuarios.

A continuación se ilustra el cálculo de las corrientes de cortocircuito en una subestación de distribución mediante un ejemplo.

EJEMPLO 5.4

Se tiene una subestación de distribución cuya diagrama unifilar se muestra en la figura 5.19.

La subestación tiene dos transformadores trifásicos de 85/23 kV, 30 MVA, con unas reactancias $X_1 = X_2 = X_3 = j0.12$, conectados en delta en el lado de 85 kV y en estrella en el de 23 kV, con el neutro de la estrella conectados a tierra a través de una reactancia $X_n = j0.4 \Omega$.

El cortocircuito trifásico en las barras colectores de 85 kV puede alcanzar el valor de 3 785 MVA.

Calcular

1. La impedancia equivalente de secuencia positiva del sistema que alimenta la subestación.
2. La magnitud de la corriente y de la potencia de cortocircuito, para el caso de un cortocircuito trifásico en el punto F localizado en las barras colectoras de 23 kV.
3. Calcular las mismas cantidades para el caso de un cortocircuito monofásico a tierra en el mismo punto.
4. Repetir los puntos 2 y 3 suponiendo que los dos transformadores trifásicos están conectados en paralelo también del lado de 23 kV.

Notas: Se supone que cuando ocurre la falla el sistema está sin carga.

Se tomarán como bases de voltaje entre líneas y como base de potencia trifásica los valores nominales de los transformadores trifásicos de la subestación, o sea 85/23 kV y 30 MVA.

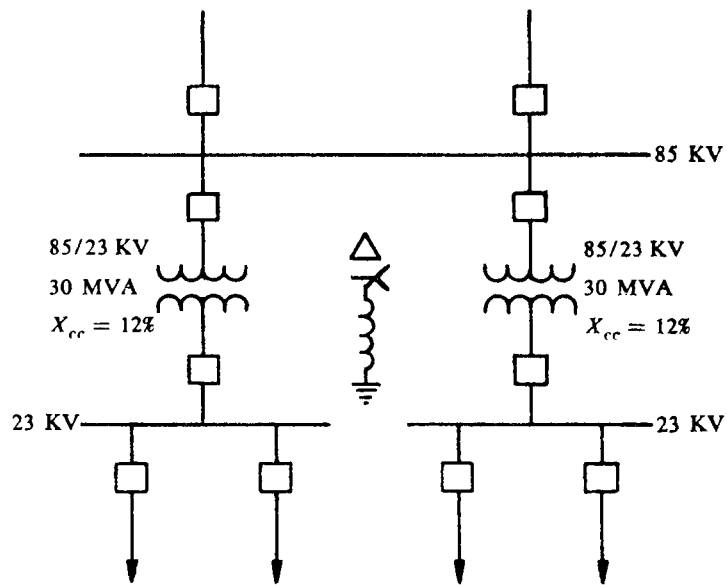


FIGURA 5.19 Subestación de distribución con los transformadores conectados en paralelo del lado de alta tensión

SOLUCIÓN

1. Cálculo de la impedancia equivalente de secuencia positiva del sistema

$$|\bar{X}_{s1}| = \frac{S_{B3\phi}}{S_{CC3\phi}} = \frac{30}{3 \cdot 785} = 0.00793$$

$$\bar{X}_{s1} = j0.00793$$

Comparada con la impedancia de los transformadores de la subestación, la impedancia del sistema es generalmente despreciable.

2. Cálculo de la corriente y la potencia de cortocircuito trifásico en las barras de 23 kV.

El circuito equivalente de secuencia positiva, en por unidad, aplicable a este caso se muestra en la figura 5.20.

En dicho circuito se verifica

$$\bar{I}_{cc3\phi} = \frac{1 \angle 0^\circ}{j0.12793} = -j7.817$$

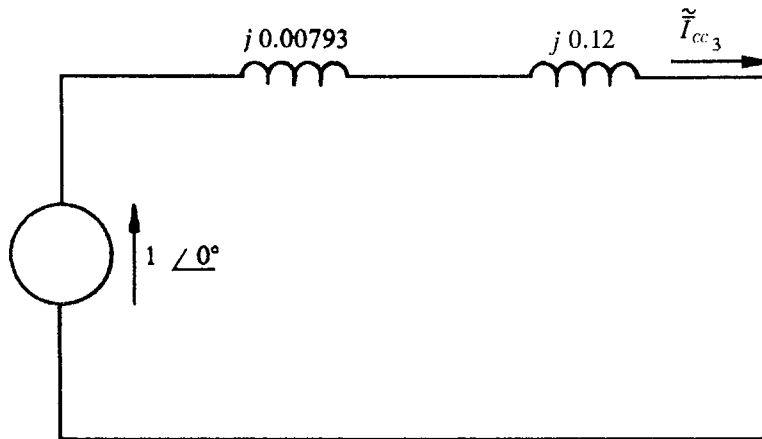


FIGURA 5.20 Circuito equivalente de secuencia positiva para el caso del inciso 2

que es la corriente de cortocircuito trifásico, en por unidad.

La base de corriente aplicable al secundario de los transformadores es

$$I_{B_s} = \frac{30\,000}{23\sqrt{3}} = 753 \text{ A}$$

La corriente de cortocircuito trifásico, en amperes, es, por tanto

$$\tilde{I}_{CC3\phi} = -j7.817 \times 753 = -j5\,886 \text{ A}$$

La potencia de cortocircuito trifásico se puede obtener como sigue:

$$S_{CC3\phi} = 5\,886 \times 23\sqrt{3} = 234\,500 \text{ kVA}$$

También puede obtenerse de la siguiente manera:

$$I_{CC3\phi} = 7.817 \times 30\,000 = 234\,500 \text{ kVA}$$

3. Cálculo de la corriente y la potencia de cortocircuito monofásico en las barras de 23 kV.

Para establecer el circuito equivalente aplicable a este caso se supone, en primer lugar, que la impedancia de secuencia negativa del sistema es igual a la de secuencia positiva. No se requiere el dato de la

impedancia de secuencia cero del sistema, debido a que los transformadores de 85/23 kV están conectados en delta del lado de alta.

Se expresa en por unidad la reactancia intercalada en el neutro de cada transformador:

$$Z_{B_s} = \frac{23^2}{30} = 17.6 \, \Omega$$

$$\bar{X}_n = \frac{j0.4}{17.6} = j0.0227$$

$$3\bar{X}_n = j0.068$$

Conectando los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero para representar las condiciones de una falla monofásica a tierra en el punto F , resulta el circuito que se muestra en la figura 5.21.

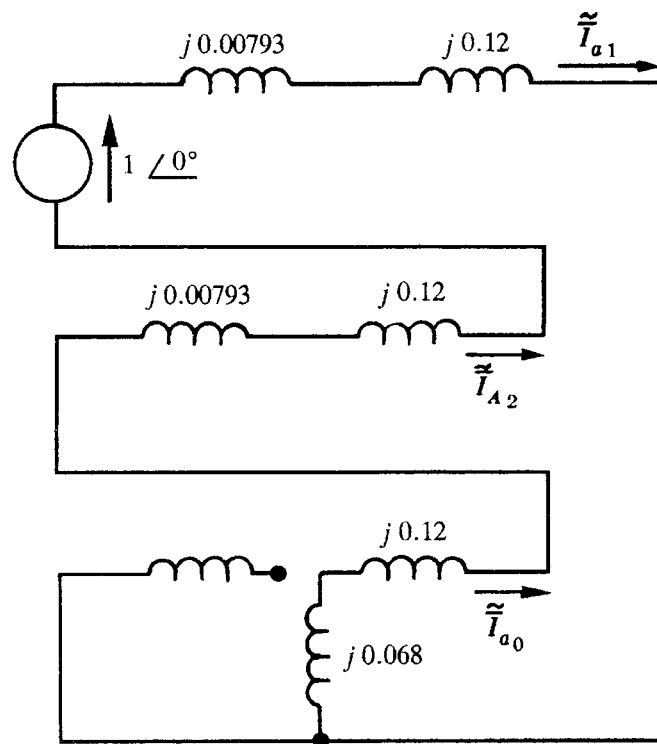


FIGURA 5.21 Interconexión de los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero para el caso del inciso 3

En este circuito se verifica

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{a_1} = \tilde{I}_{a_2} = \tilde{I}_{a_0} &= \frac{1 \angle 0^\circ}{j0.12793 + j0.12793 + j0.188} \\ &= \frac{1 \angle 0^\circ}{j0.44986} = -j2.253\end{aligned}$$

La corriente de cortocircuito monofásico a tierra en el punto F es

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{CC1\phi} &= \tilde{I}_{a_1} + \tilde{I}_{a_2} + \tilde{I}_{a_0} = 3\tilde{I}_{a_1} \\ &= -j2.253 \times 3 = -j6.759\end{aligned}$$

La corriente de cortocircuito en amperes es

$$\tilde{I}_{1\phi} = j6.759 \times 753 = 5\,090\text{ A}$$

La potencia de cortocircuito monofásico

$$S_{CC1\phi} = 5\,090 \times 23\sqrt{3} = 202\,770\text{ kVA}$$

$$S_{CC1\phi} = 6.759 \times 30\,000 = 202\,770\text{ kVA}$$

4. Cortocircuito trifásico y monofásico a tierra con los transformadores trifásicos conectados en paralelo también del lado de 23 kV.

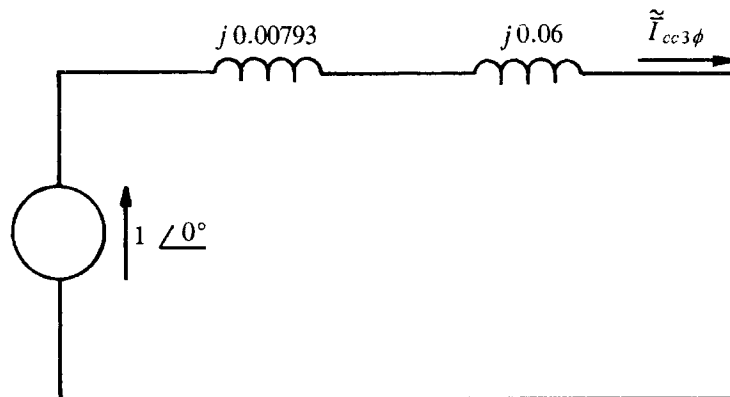


FIGURA 5.22 Circuito equivalente de secuencia positiva para el caso del inciso 4

Al poner en paralelo los dos transformadores, la reactancia resultante es la mitad de la de cada transformador, o sea $j\ 0.06$.

Para el caso del cortocircuito trifásico en las barras de 23 kV el circuito equivalente queda como se muestra en la figura 5.22.

La corriente y la potencia de cortocircuito trifásico a tierra son

$$\tilde{I}_{CC3\phi} = \frac{1 \angle 0^\circ}{j0.06793} = -j14.721$$

$$\tilde{I}_{CC3\phi} = j14.721 \times 753 = -j11\ 085\text{ A}$$

$$S_{CC3\phi} = 14.721 \times 30\ 000 = 441\ 630$$

Como puede verse estos valores son casi el doble de los que se obtuvieron cuando los transformadores no estaban conectados en paralelo del lado de 23 kV.

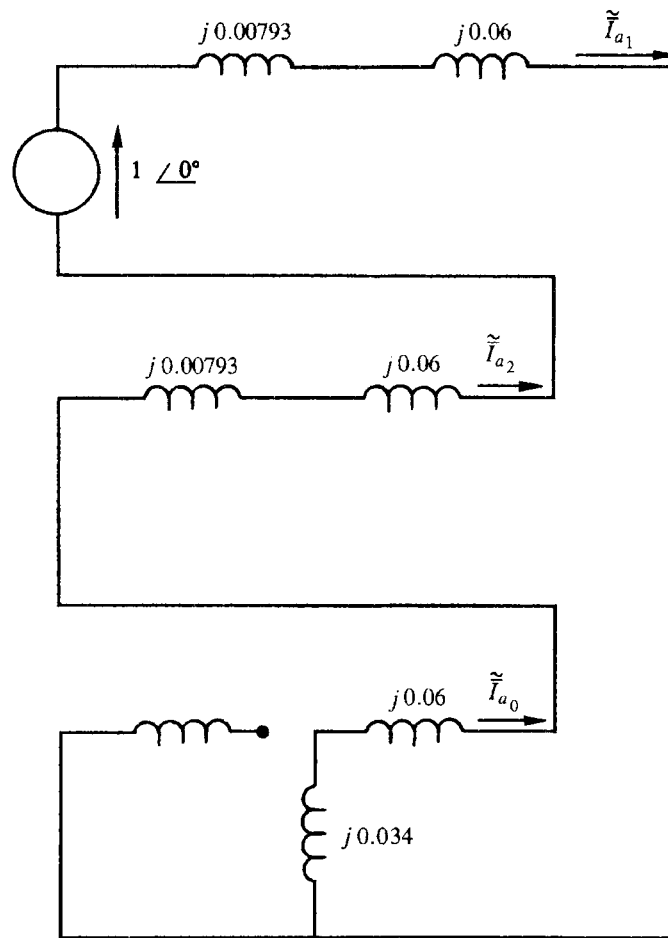


FIGURA 5.23 Interconexión de los circuitos de secuencia positiva, negativa y cero para el caso del inciso 4

Para el caso del cortocircuito monofásico a tierra en las barras de 23 kV, el circuito equivalente resultante es el mostrado en la figura 5.23.

La corriente y la potencia de cortocircuito monofásico a tierra resultan como sigue:

$$\tilde{I}_{a_1} = \tilde{I}_{a_2} = \tilde{I}_{a_0} = \frac{1 \angle 0^\circ}{j0.06793 + j0.06793 + j0.094} = -j4.350$$

$$\tilde{I}_{cc1\phi} = -j4.350 \times 3 = -j13.05$$

$$\tilde{I}_{cc1\phi} = -j13.05 \times 753 = 9\,827\text{ A}$$

$$S_{cc1\phi} = 13.05 \times 30\,000 = 391\,500\text{ kVA}$$

En este caso también casi se duplica el valor del cortocircuito.

5.7 Cálculo de las corrientes de cortocircuito en una instalación industrial

El método simplificado para el cálculo de las corrientes y potencias de cortocircuito antes descrito se aplica también al caso de una instalación eléctrica industrial.

La característica de este tipo de instalaciones es, generalmente, la existencia de motores de inducción, cuya contribución al cortocircuito debe tomarse en cuenta, especialmente en los sistemas de baja tensión (menos de 600 volts), ya que los interruptores de baja tensión son muy rápidos, lo que hace que la interrupción de la corriente ocurra durante los primeros ciclos después de producirse el cortocircuito, cuando todavía no ha decaído apreciablemente la corriente aportada por los motores de inducción.

La reactancia que debe considerarse para el cálculo de la contribución de los motores de inducción a un cortocircuito es la reactancia subtransitoria X''_d . Si no se dispone de esta información, puede obtenerse un valor bastante aproximado del valor en por unidad de dicha reactancia dividiendo la potencia eléctrica aparente a plena carga del motor por su potencia eléctrica aparente con el rotor parado. Por ejemplo, supóngase que se tiene un motor de inducción trifásico con los siguientes datos de placa:

Voltaje nominal entre fases	440 V
Potencia mecánica	300 HP
Potencia eléctrica aparente a plena carga	300 kVA
Potencia eléctrica aparente a rotor parado	2 000 kVA

El valor aproximado de la reactancia subtransitoria, en por unidad, es

$$\overline{X}_d'' = \frac{300}{2\ 000} = 0.15$$

Este valor corresponde a una base de potencia trifásica de 300 kVA y una base de voltaje entre fases de 440 V.

La base de potencia trifásica de un motor, ya sea de inducción o síncrono, correspondiente a los valores nominales del motor, es igual a la corriente a plena carga del motor por el voltaje nominal entre fases y por la raíz cuadrada de tres.

En el caso en que únicamente se disponga de los siguientes datos: voltaje nominal entre fases del motor y potencia mecánica en caballos, la base de potencia trifásica correspondiente se determina de la siguiente manera:

Motores de inducción: S_B en kVA = Potencia mecánica en HP

Motores síncronos: S_B en kVA = 0.8 Potencia mecánica en HP

En la mayor parte de los casos de cálculo de cortocircuito en instalaciones industriales se puede despreciar la resistencia de los distintos elementos y considerar únicamente la reactancia inductiva. En el caso de sistemas de baja tensión (menos de 600 volts) con cables aislados de gran longitud, es necesario considerar tanto la resistencia como la reactancia de estos cables.

EJEMPLO 5.5

El diagrama unifilar de la figura 5.24 corresponde a un sistema trifásico de una instalación industrial.

Se pide calcular lo siguiente:

1. La corriente de cortocircuito, en por unidad y en amperes, y la potencia de cortocircuito correspondiente, para un cortocircuito trifásico en el punto F_1 .
2. Lo mismo que en el primer punto, para un cortocircuito trifásico en el punto F_2 .
3. Lo mismo que en el primer punto, para un cortocircuito monofásico a tierra en el punto F_1 .
4. Lo mismo que en el primer punto, para un cortocircuito monofásico a tierra en el punto F_2 .

Notas:

- a) Tómense como bases de voltaje entre fases los voltajes nominales, o sea 23 000/440/220 volts y como base de potencia trifásica 750 kVA.

- b) Despréciense las corrientes de carga y supóngase que en los puntos en que ocurre el cortocircuito existía antes del mismo el voltaje nominal (1 en por unidad).

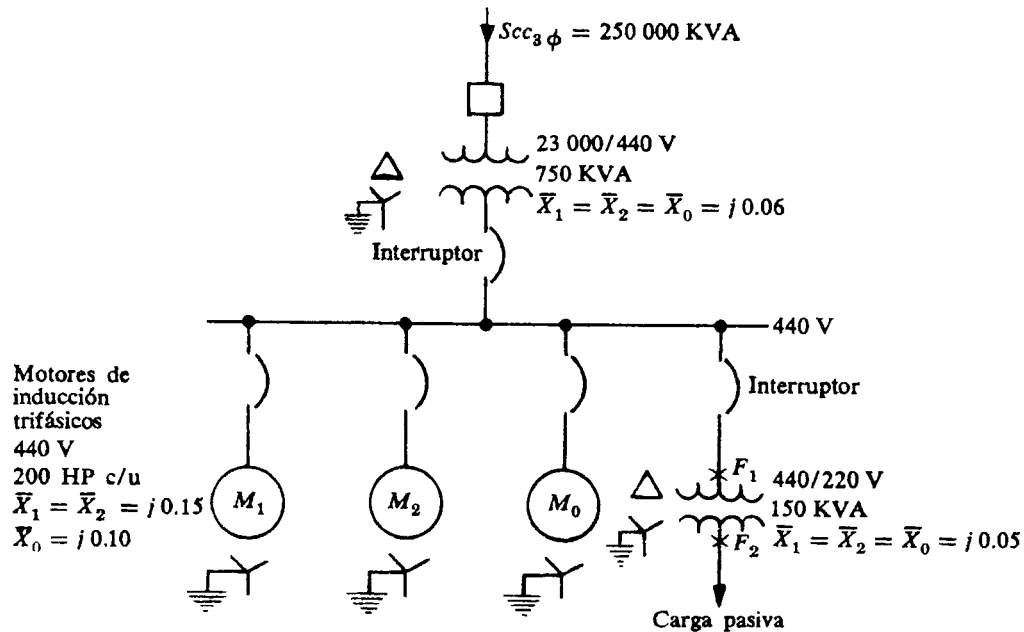


FIGURA 5.24 Diagrama unifilar de la instalación industrial del ejemplo 5.5

SOLUCIÓN

Se refieren todas las impedancias a las bases mencionadas.

Impedancias de los motores de inducción

$$\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = j0.15 \times \frac{750}{200} = j0.5625$$

$$\bar{X}_0 = j0.10 \times \frac{750}{200} = j0.375$$

Impedancias del transformador de 440/220 V

$$\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = \bar{X}_0 = j0.05 \times \frac{750}{150} = j0.25$$

Impedancia equivalente del sistema

$$\bar{X}_{s1} = j \frac{750}{250\,000} = j0.003$$

1. Cortocircuito trifásico en el punto F_1

El cortocircuito está alimentado por una parte por el sistema de la empresa suministradora y por otra parte por los tres motores de inducción en paralelo, que pueden sustituirse por un solo motor equivalente cuya impedancia es la tercera parte de la de cada motor.

$$\bar{X}_{M1} = \frac{j0.5625}{3} = j0.1875$$

El circuito equivalente de secuencia positiva para el caso de una falla trifásica en el punto F_1 queda como se indica en la figura 5.25.

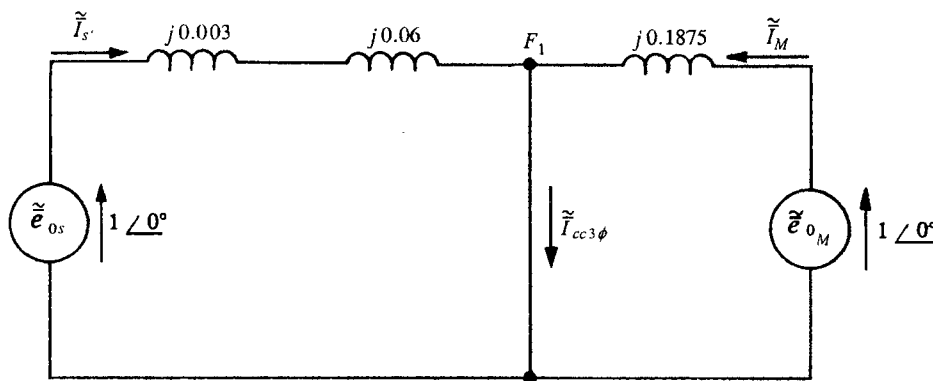


FIGURA 5.25 Circuito equivalente de secuencia positiva para el caso de una falla trifásica en el punto F_1

a) Solución sin usar el teorema de Thevenin

Aportación del sistema a la corriente de cortocircuito

$$\bar{I}_s = \frac{1 \angle 0^\circ}{j0.063} = 15.875 \angle -90^\circ$$

Aportación de los tres motores a la corriente de cortocircuito

$$\tilde{I}_{3M} = \frac{1 \angle 0^\circ}{j0.1875} = 5.333 \angle -90^\circ$$

Corriente total de cortocircuito trifásico en por unidad

$$\tilde{I}_{CC3\phi} = -j15.873 - j5.333 = 21.206 \angle -90^\circ$$

Corriente total de cortocircuito trifásico en amperes

$$I_{B_2} = \frac{750}{0.44\sqrt{3}} = 984.1 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{CC3\phi} = 984.1 \times 21.206 \angle -90^\circ = 20\,868.8 \angle -90^\circ \text{ A}$$

Potencia de cortocircuito trifásico

$$S_{B3\phi} = 750 \text{ kVA}$$

$$S_{CC3\phi} = 750 \times 21.206 = 15\,904.5 \text{ kVA}$$

b) Solución usando el teorema de Thevenin

La impedancia del sistema vista desde el punto de falla es

$$\bar{Z}_{r_1} = \frac{j0.063 \times j0.1875}{j0.063 + j0.1875} = j0.04716$$

El circuito equivalente de Thevenin queda como se indica en la figura 5.26.

En el circuito anterior se verifica

$$\bar{I}_{CC3\phi} = \frac{1 \angle 0^\circ}{j0.04716} = 21.206 \angle -90^\circ$$

que es el mismo valor que se obtuvo por el otro procedimiento.

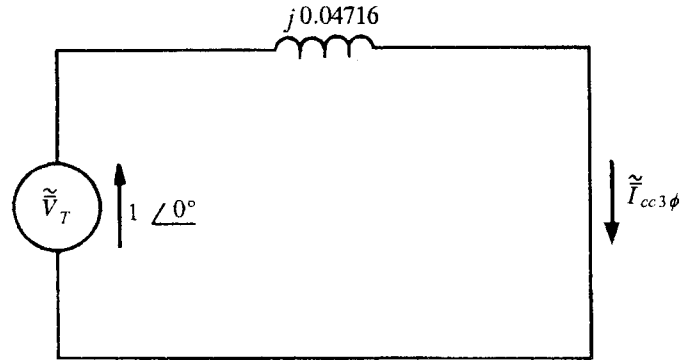


FIGURA 5.26 Circuito equivalente de Thevenin correspondiente al circuito de secuencia positiva de la figura 5.25

2. Cortocircuito trifásico en el punto F_2

El circuito equivalente de secuencia positiva para este caso es como se indica en la figura 5.27.

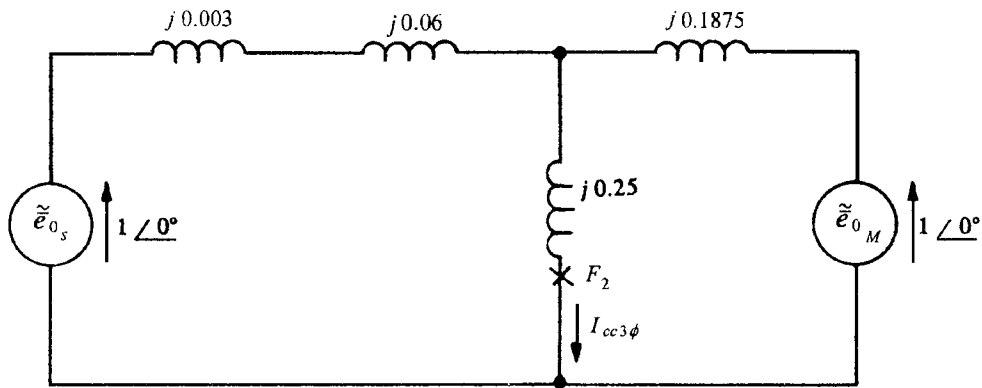


FIGURA 5.27 Circuito equivalente de secuencia positiva para el caso de una falla trifásica en el punto F_2

La impedancia del sistema vista desde el punto de falla es

$$\bar{Z}_T = \frac{j0.063 \times j0.1875}{j0.063 + j0.1875} + j0.25 = j0.29716$$

El circuito equivalente de Thevenin resultante es como se muestra en la figura 5.28.

La corriente de cortocircuito trifásica en el punto F_2 , en por unidad, es

$$I_{CC3\phi} = \frac{1 \angle 0^\circ}{j0.29716} = 3.365 \angle -90^\circ$$

Base de corriente aplicable al lado de 220 V

$$I_{B_3} = \frac{750}{0.22\sqrt{3}} = 1\,968.2 \text{ A}$$

Corriente de cortocircuito trifásico en el punto F_2 , en amperes

$$\tilde{I}_{CC3\phi} = 1\,968.2 \times 3.365 \angle -90^\circ = 6623 \angle -90^\circ \text{ A}$$

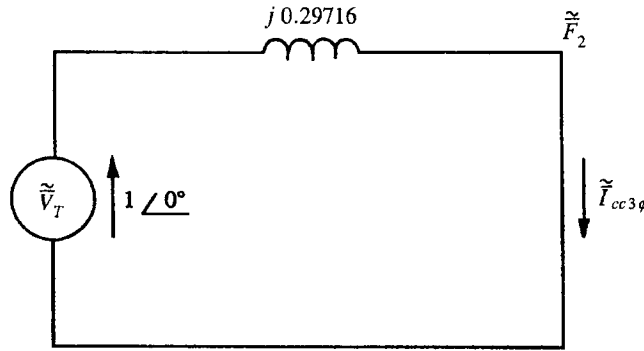


FIGURA 5.28 Circuito equivalente de Thevenin correspondiente al circuito de secuencia positiva de la figura 5.27

3. Cortocircuito monofásico en el punto F_1

Los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero, interconectados para representar una falla monofásica a tierra en el punto F_1 , se muestran en la figura 5.29.

El circuito de secuencia positiva es el mismo que el mostrado anteriormente, el de secuencia negativa tiene las mismas impedancias que el de secuencia positiva y el de secuencia cero corresponde a la aportación de corriente de secuencia cero por el transformador de 23 000/440 kV, debida a su conexión delta en 23 000 volts y estrella con neutro directamente a tierra en 440 volts, y por los tres motores trifásicos en paralelo, conectados en estrella con el neutro a tierra, con una impedancia de secuencia cero resultante de

$$\bar{X}_{M_0} = \frac{j0.375}{3} = j0.125$$

Aplicando el teorema de Thevenin, las impedancias de secuencia positiva, negativa y cero, vistas desde el punto de falla F_1 , son respectivamente

$$\bar{Z}_{T_1} = \bar{Z}_{T_2} = \frac{j0.063 \times j0.1875}{j0.063 + j0.1875} = j0.4716$$

$$\bar{Z}_{T_0} = \frac{j0.06 \times j0.125}{j0.06 + j0.125} = j0.0405$$

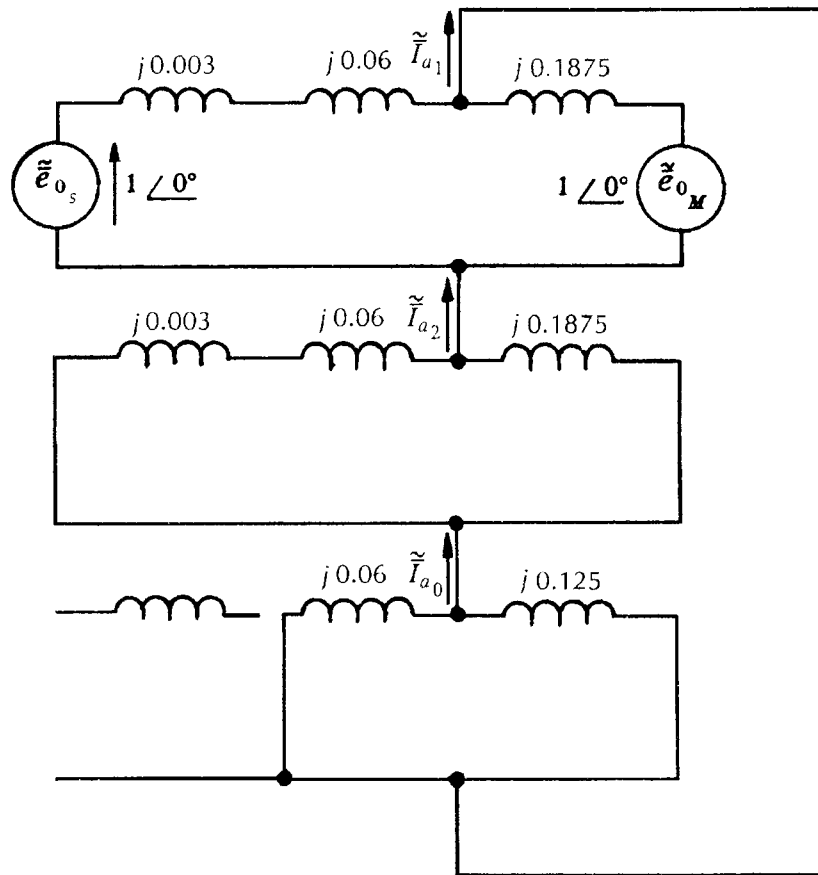


FIGURA 5.29 Circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero interconectados para representar una falla monofásica a tierra en el punto F_1

En la figura 5.30 se muestran los circuitos equivalentes de Thevenin de secuencia positiva, negativa y cero resultantes, interconectados para representar una falla monofásica a tierra en el punto F_1 .

En ese circuito se verifica

$$\tilde{I}_{a1} = \tilde{I}_{a2} = \tilde{I}_{a0} = \frac{1 \angle 90^\circ}{j0.04716 + j0.04716 + j0.0405} = 7.413 \angle -90^\circ$$

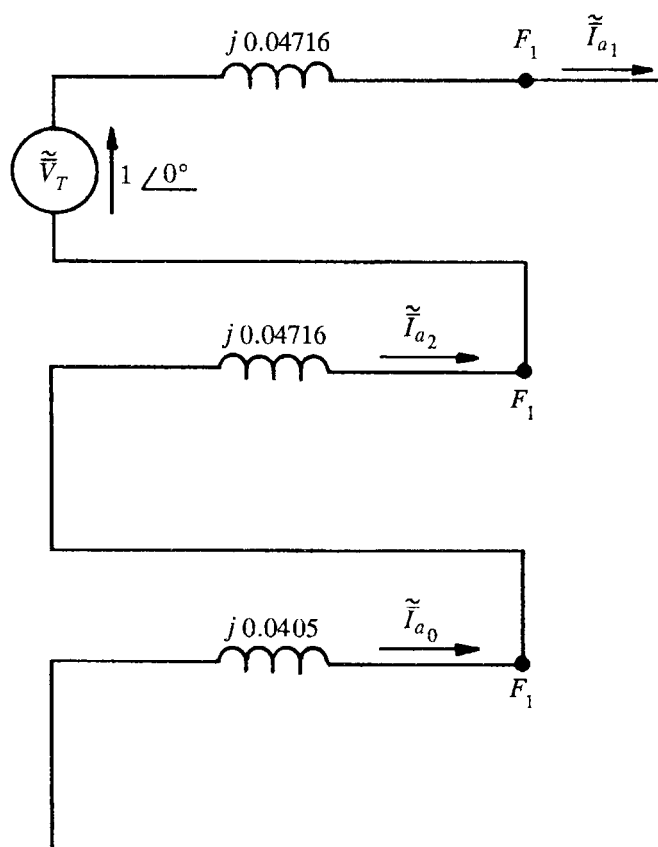


FIGURA 5.30 Circuitos equivalentes de Thevenin de secuencia positiva, negativa y cero, interconectados para representar una falla monofásica en el punto F_1

La corriente de cortocircuito monofásico a tierra en el punto F_1 , en por unidad, es

$$\tilde{\tilde{I}}_{CC1\phi} = \tilde{\tilde{I}}_{a1} + \tilde{\tilde{I}}_{a2} + \tilde{\tilde{I}}_{a0} = 3\tilde{\tilde{I}}_{a1}$$

$$\tilde{\tilde{I}}_{CC1\phi} = 3 \times 7.413 \angle -90^\circ = 22.239 \angle -90^\circ$$

La base de corriente aplicable a punto F_1 es

$$I_{B_2} = \frac{750}{0.44\sqrt{3}} = 984.1$$

Corriente de cortocircuito monofásico a tierra en el punto F_1 , en amperes

$$\tilde{I}_{CC1\phi} = 984.1 \times 22.239 \angle -90^\circ = 21885 \angle -90^\circ \text{ A}$$

Potencia de cortocircuito monofásico correspondiente

$$S_{CC1\phi} = 750 \times 22.239 = 16\,679 \text{ kVA}$$

4. Cortocircuito monofásico en el punto F_2

En la figura 5.31 se muestran los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero, interconectados para representar una falla monofásica a tierra en el punto F_2 .

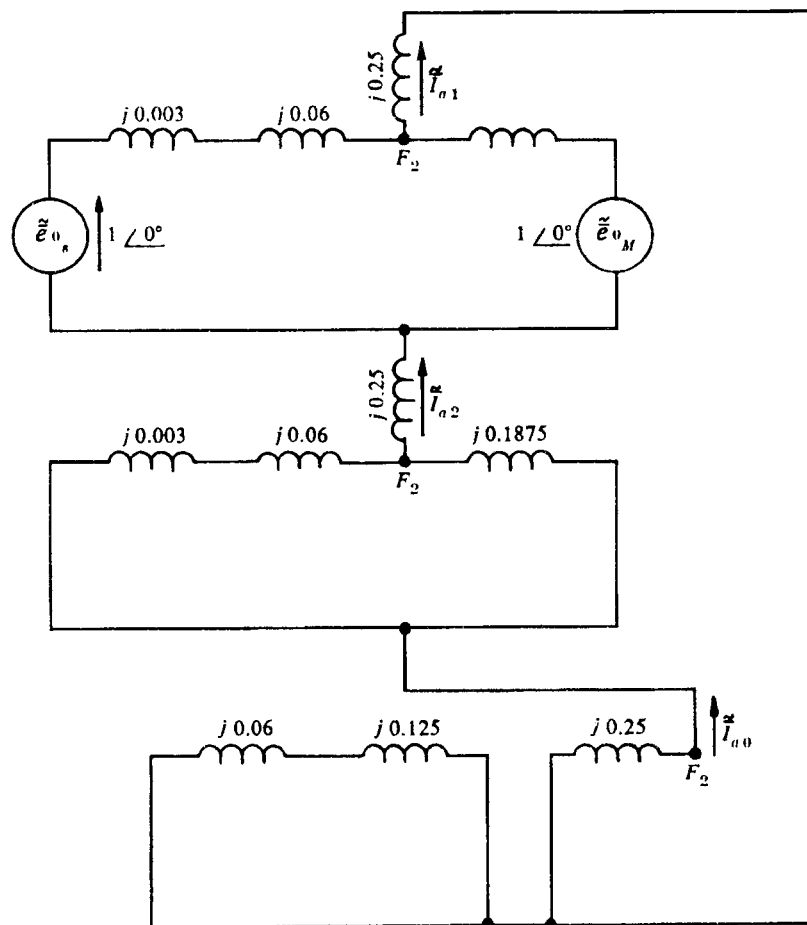


FIGURA 5.31 Circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero, interconectados para representar una falla monofásica a tierra en el punto F_2

Aplicando el teorema de Thevenin, las impedancias de secuencia positiva, negativa y cero vistas desde el punto de falla F_2 son, respectivamente

$$\bar{Z}_{T_1} = \bar{Z}_{T_2} = \frac{j0.063 \times j0.1875}{j0.063 + j0.1875} + j0.25 = j0.2972$$

$$\bar{Z}_{T_0} = j0.25$$

En la figura 5.32 se muestran los circuitos equivalentes de Thevenin de secuencia positiva, negativa y cero, interconectados para representar una falla monofásica a tierra en el punto F_2 .

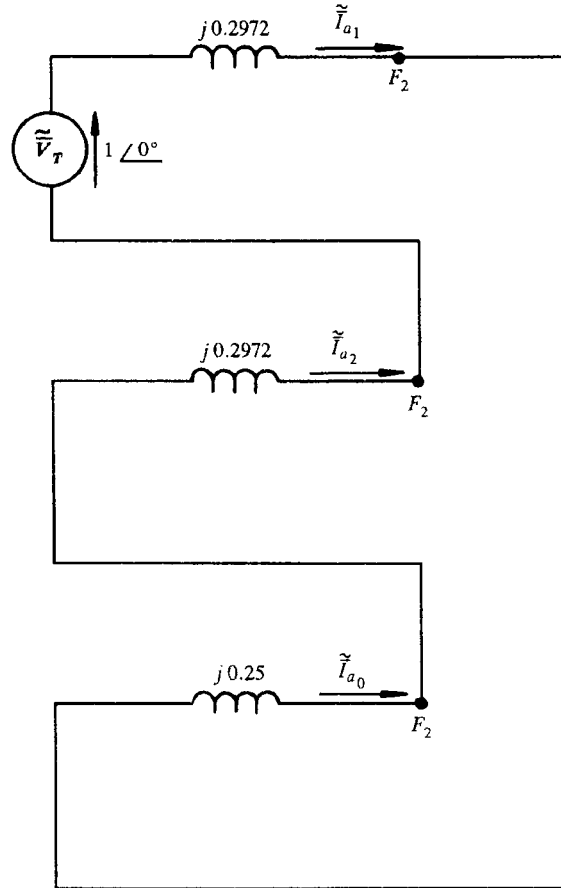


FIGURA 5.32 Circuitos equivalentes de Thevenin de secuencia positiva, negativa y cero, interconectados para representar una falla monofásica en el punto F_2

En el circuito de la figura 5.32 se verifica

$$\tilde{\bar{I}}_{a1} = \tilde{\bar{I}}_{a2} = \tilde{\bar{I}}_{a0} = \frac{1 \angle 0^\circ}{j0.2972 + j0.2972 + j0.25} = 1.1843 \angle -90^\circ$$

La corriente de cortocircuito monofásico a tierra en el punto F_2 , en por unidad, es

$$\widetilde{I}_{CC1\phi} = \widetilde{I}_{a1} + \widetilde{I}_{a2} + \widetilde{I}_{a0} = 3\widetilde{I}_{a1}$$

$$\widetilde{I}_{CC1\phi} = 3 \times 1.1843 \angle -90^\circ = 3.544 \angle -90^\circ$$

La base de corriente aplicable al punto F_2 es

$$I_{B_3} = \frac{750}{0.22\sqrt{3}} = 1\,968.2 \text{ A}$$

Corriente de cortocircuito monofásico a tierra en el punto F_2 , en amperes

$$\widetilde{I}_{CC1} = 1\,968.2 \times 3.554 \angle -90^\circ = 6\,993 \angle -90^\circ \text{ A}$$

Potencia de cortocircuito monofásico correspondiente

$$S_{CC1} = 750 \times 3.554 = 2\,665.5 \text{ kVA}$$

5.8 Cálculo de las corrientes de cortocircuito en los sistemas eléctricos interconectados

5.8.1 Método de la matriz de impedancias de bus

La determinación de las corrientes y voltajes en un sistema interconectado afectado por una falla es necesaria para seleccionar los interruptores.

También se necesita el conocimiento de las corrientes que circulan por el sistema durante una falla para la aplicación de relevadores de protección.

Si el sistema comprende una red interconectada de cierta importancia, la solución numérica del problema requiere utilizar métodos sistemáticos que se presten al empleo de computadoras digitales.

El método más utilizado actualmente es el de la matriz de impedancias de bus, que se describirá en esta sección. Se estudiará primero su aplicación al cálculo de fallas trifásicas equilibradas y después se generalizará para cualquier tipo de falla desequilibrada.

5.9 Fallas trifásicas

Para estudiar en forma completa el comportamiento de un sistema en condiciones de falla, es necesario analizar la ocurrencia de fallas en distintos puntos del sistema. Generalmente se considera en cada caso una sola falla, ya que la probabilidad de que ocurran dos o más fallas simultáneamente es muy baja.

En el caso de un cortocircuito trifásico las corrientes de falla de cada fase son de la misma magnitud y constituyen un sistema de corrientes trifásico equilibrado. Por tanto, el análisis se realiza considerando únicamente el circuito equivalente de secuencia positiva.

Una vez calculada la corriente de falla en cada punto considerado, es necesario determinar los voltajes resultantes en los nodos y las corrientes que circularán por las distintas ramas de la red. Los voltajes en los nodos de la red son el resultado de superponer a las condiciones existentes, inmediatamente antes de ocurrir la falla, los cambios producidos por la presencia de ésta.

Debe recordarse que para el cálculo de las corrientes de cortocircuito trifásico los generadores y los motores se representan por una fuente de voltaje de magnitud igual a una fuerza electromotriz que representa las condiciones de eslabonamiento de flujo que existían inmediatamente antes de producirse el cortocircuito, conectada en serie con la reactancia subtransitoria si se trata de calcular la corriente inicial de cortocircuito o con la reactancia transitoria para calcular la corriente de cortocircuito subsiguiente.

Como se vio en las secciones anteriores, la corriente en el punto de falla puede calcularse haciendo uso del teorema de Thevenin

$$\tilde{I}_F = \frac{\tilde{V}_0}{\bar{Z}_T + \bar{Z}_F} \quad (5.1)$$

donde

$\tilde{I}_F$ corriente de falla

$\tilde{V}_0$ voltaje al neutro en el punto de falla antes de que ocurra la falla

$\bar{Z}_T$ impedancia de la red vista desde el punto de falla

$\bar{Z}_F$ impedancia de la falla (que puede ser igual a cero para una falla franca)

Para calcular la impedancia de Thevenin Z_T , deben ponerse en cortocircuito todas las fuentes de voltaje de la red.

Por tanto, los cambios en los voltajes y corrientes debidos a un cortocircuito trifásico que ocurra en uno de los nodos o buses de un sistema interconectado pueden determinarse mediante el cálculo de una red pasiva, alimentada por una fuente de corriente igual a la corriente de falla trifásica en ese punto del sistema, como se muestra en la figura 5.33.

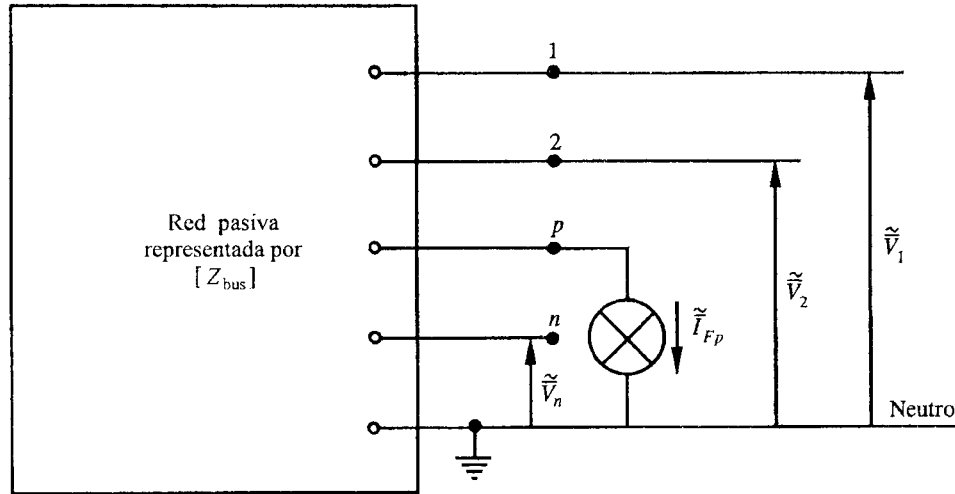


FIGURA 5.33 Representación de las condiciones debidas a una falla trifásica producida en un nodo de una red

Para una red como la de la figura 5.33 en la que existan fuentes de corriente en todos los nodos, puede escribirse el siguiente sistema de ecuaciones, como se vio en el capítulo 8 de *Redes eléctricas I* (ecuaciones 8.44):

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_1 &= \bar{Z}_{11} \tilde{I}_{F1} + \bar{Z}_{12} \tilde{I}_{F2} + \dots + \bar{Z}_{1p} \tilde{I}_{Fp} + \dots + \bar{Z}_{1n} \tilde{I}_{Fn} \\
 \tilde{V}_2 &= \bar{Z}_{21} \tilde{I}_{F1} + \bar{Z}_{22} \tilde{I}_{F2} + \dots + \bar{Z}_{2p} \tilde{I}_{Fp} + \dots + \bar{Z}_{2n} \tilde{I}_{Fn} \\
 &\dots \dots \dots \\
 \tilde{V}_p &= \bar{Z}_{p1} \tilde{I}_{F1} + \bar{Z}_{p2} \tilde{I}_{F2} + \dots + \bar{Z}_{pp} \tilde{I}_{Fp} + \dots + \bar{Z}_{pn} \tilde{I}_{Fn} \\
 &\dots \dots \dots \\
 \tilde{V}_n &= \bar{Z}_{n1} \tilde{I}_{F1} + \bar{Z}_{n2} \tilde{I}_{F2} + \dots + \bar{Z}_{np} \tilde{I}_{Fp} + \dots + \bar{Z}_{nn} \tilde{I}_{Fn}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde

$\tilde{\tilde{V}}_1, \tilde{\tilde{V}}_2, \dots, \tilde{\tilde{V}}_n$ son los voltajes al neutro en los nodos 1, 2, ..., n

$\tilde{\tilde{I}}_{F1}, \tilde{\tilde{I}}_{F2}, \dots, \tilde{\tilde{I}}_{Fn}$ son las fuentes de corriente conectadas a los nodos 1, 2, ..., n

$\bar{Z}_{11}, \bar{Z}_{12}, \dots, \bar{Z}_{nn}$ son las impedancias puntuales

$\bar{Z}_{12}, \bar{Z}_{13}, \dots, \bar{Z}_{1n}$ son las impedancias de transferencia

Utilizando la notación matricial abreviada

$$[\tilde{\tilde{V}}] = [\bar{Z}_{bus}][\tilde{\tilde{I}}_F] \quad (5.3)$$

$[\tilde{\tilde{V}}]$ es la matriz columna de los voltajes de los nodos

$[\bar{Z}_{bus}]$ es la matriz de impedancias de bus formada por las impedancias puntuales y las impedancias de transferencia

$[\tilde{\tilde{I}}_F]$ es la matriz columna de las fuentes de corriente

Las ecuaciones 5.2 permiten calcular los cambios de voltajes en todos los nodos de la red si se conocen las impedancias puntuales y de transferencia y las fuentes de corriente.

Si únicamente existe una fuente de corriente, conectada al nodo p , las ecuaciones 5.2 se reducen a las siguientes:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{V}}_1 &= \bar{Z}_{1p} \tilde{\tilde{I}}_{Fp} \\ \tilde{\tilde{V}}_2 &= \bar{Z}_{2p} \tilde{\tilde{I}}_{Fp} \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{\tilde{V}}_p &= \bar{Z}_{pp} \tilde{\tilde{I}}_{Fp} \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{\tilde{V}}_n &= \bar{Z}_{np} \tilde{\tilde{I}}_{Fp} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Para calcular los voltajes en los distintos buses o nodos de la red durante la falla, hay que tener en cuenta que inmediatamente antes de ocurrir la falla esos nodos tenían voltajes al neutro que llamaremos

$$\widetilde{\widetilde{V}}_{0_1}, \widetilde{\widetilde{V}}_{0_2}, \dots, \widetilde{\widetilde{V}}_{0_p}, \dots, \widetilde{\widetilde{V}}_{0_n}$$

Los voltajes durante la falla V_F en los distintos nodos de la red se obtienen superponiendo a los voltajes existentes antes de la falla V_0 los cambios de voltaje producidos por la falla V que están dados por las ecuaciones 5.4.

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{V}}_{F1} &= \widetilde{\widetilde{V}}_{01} - \widetilde{\widetilde{V}}_1 = \widetilde{\widetilde{V}}_{01} - \bar{Z}_{1p} \widetilde{\widetilde{I}}_{Fp} \\ \widetilde{\widetilde{V}}_{F2} &= \widetilde{\widetilde{V}}_{02} - \widetilde{\widetilde{V}}_2 = \widetilde{\widetilde{V}}_{02} - \bar{Z}_{2p} \widetilde{\widetilde{I}}_{Fp} \\ &\dots\dots\dots \\ \widetilde{\widetilde{V}}_{Fp} &= \widetilde{\widetilde{V}}_{0p} - \widetilde{\widetilde{V}}_p = \widetilde{\widetilde{V}}_{0p} - \bar{Z}_{pp} \widetilde{\widetilde{I}}_{Fp} \\ &\dots\dots\dots \\ \widetilde{\widetilde{V}}_{Fn} &= \widetilde{\widetilde{V}}_{0n} - \widetilde{\widetilde{V}}_n = \widetilde{\widetilde{V}}_{0n} - \bar{Z}_{np} \widetilde{\widetilde{I}}_{Fp}\end{aligned}\tag{5.5}$$

El signo menos asignado en las expresiones anteriores a los voltajes producidos por la falla se debe al sentido de la corriente de la falla I_{Fp} señalado en la figura 5.1, que es saliendo del nodo p y que corresponde al hecho de que la presencia de la falla produce corrientes adicionales que se suman fasorialmente a las que existían inmediatamente antes de ocurrir la falla y esas corrientes adicionales producen caídas de voltaje que deben restarse de los voltajes existentes antes de la falla para obtener los voltajes durante la falla.

Sabemos, por otra parte, que el voltaje al neutro en el nodo afectado por la falla trifásica es

$$\widetilde{\widetilde{V}}_{Fp} = \bar{Z}_F \widetilde{\widetilde{I}}_{Fp}\tag{5.6}$$

donde $\bar{Z}_F$ es la impedancia de la falla.

Sustituyendo esta expresión en la ecuación 5.5 correspondiente a V_{Fp}

$$\begin{aligned}\bar{Z}_F \widetilde{\widetilde{I}}_{Fp} &= \widetilde{\widetilde{V}}_{0p} - \bar{Z}_{pp} \widetilde{\widetilde{I}}_{Fp} \\ \widetilde{\widetilde{I}}_{Fp} &= \frac{\widetilde{\widetilde{V}}_{0p}}{\bar{Z}_{pp} + \bar{Z}_F}\end{aligned}\tag{5.7}$$

La expresión 5.7 permite calcular la corriente en el punto de falla. Una vez conocida esta corriente pueden calcularse los voltajes $\tilde{\tilde{V}}_F$ en los distintos nodos durante la falla mediante las ecuaciones 5.5.

Comparando las ecuaciones 5.1 y 5.7 pueden verse que

$$\bar{Z}_T = \bar{Z}_{pp} \quad (5.8)$$

Sustituyendo el valor de I_{Fp} dado por la ecuación 5.7 en las ecuaciones 5.5

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{V}}_{F1} &= \tilde{\tilde{V}}_{01} - \frac{\bar{Z}_{1p}}{\bar{Z}_{pp} + \bar{Z}_f} \tilde{\tilde{V}}_{0p} \\ \tilde{\tilde{V}}_{F2} &= \tilde{\tilde{V}}_{02} - \frac{\bar{Z}_{2p}}{\bar{Z}_{pp} + \bar{Z}_F} \tilde{\tilde{V}}_{0p} \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\tilde{V}}_{Fp} &= \tilde{\tilde{V}}_{0p} - \frac{\bar{Z}_{pp}}{\bar{Z}_{pp} + \bar{Z}_F} \tilde{\tilde{V}}_{0p} = \frac{\bar{Z}_F}{\bar{Z}_{pp} + \bar{Z}_F} \tilde{\tilde{V}}_{0p} \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\tilde{V}}_{Fn} &= \tilde{\tilde{V}}_{0n} - \frac{\bar{Z}_{np}}{\bar{Z}_{pp} + \bar{Z}_F} \tilde{\tilde{V}}_{0p} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Si la falla está sólidamente establecida, o sea si la impedancia $\bar{Z}_F = 0$, las expresiones 5.9 se reducen

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{V}}_{F1} &= \tilde{\tilde{V}}_{01} - \frac{\bar{Z}_{1p}}{\bar{Z}_{pp}} \tilde{\tilde{V}}_{0p} \\ \tilde{\tilde{V}}_{F2} &= \tilde{\tilde{V}}_{02} - \frac{\bar{Z}_{2p}}{\bar{Z}_{pp}} \tilde{\tilde{V}}_{0p} \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\tilde{V}}_{Fp} &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\tilde{V}}_{Fn} &= \tilde{\tilde{V}}_{0n} - \frac{\bar{Z}_{np}}{\bar{Z}_{pp}} \tilde{\tilde{V}}_{0p} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Una vez calculados los voltajes existentes en los distintos nodos de la red afectada por una falla en uno de sus nodos, pueden calcularse las corrientes que circulan por las distintas ramas de la red durante el cortocircuito mediante la siguiente expresión:

$$\widetilde{\widetilde{I}}_{jk} = \overline{Y}_{jk} (\widetilde{\widetilde{V}}_{Fj} - \widetilde{\widetilde{V}}_{Fk}) \quad (5.11)$$

donde

$\widetilde{\widetilde{I}}_{jk}$ corriente que circula por la rama comprendida entre el nodo j y el nodo k

$\overline{Y}_{jk}$ admitancia de la rama comprendida entre el nodo j y el nodo k

$\widetilde{\widetilde{V}}_{Fj}$ voltaje al neutro del nodo j

$\widetilde{\widetilde{V}}_{Fk}$ voltaje al neutro del nodo k

El método para el cálculo de una red afectada por un cortocircuito trifásico que se acaba de describir es un método exacto que no requiere hacer simplificaciones.

La matriz Z_{bus} se puede obtener como se explicó en el capítulo 8 de *Redes eléctricas 1*, por la inversión de la matriz Y_{bus} .

$$[\overline{Z}_{bus}] = [\overline{Y}_{bus}^{-1}] \quad (5.12)$$

A su vez la matriz Y_{bus} se obtiene a partir de la matriz primitiva de admitancias y la matriz de conexión rama punto de unión

$$[\overline{Y}_{bus}] = [A_r][\overline{Y}][A] \quad (5.13)$$

Los voltajes en los distintos puntos de unión antes de la falla pueden obtenerse mediante un estudio de flujos de potencia.

En sistemas eléctricos grandes, que pueden tener cientos de nodos, las matrices de admitancias de bus correspondientes son muy grandes ya que la dimensión de la matriz es igual al número de nodos del sistema). La inversión de matrices de esas dimensiones, que tiene que realizarse mediante una computadora digital, presenta dificultades de cómputo, ya que requiere mucha memoria, toma bastante tiempo y tiene problemas en cuanto a la precisión.

Existen algoritmos para la formación de la matriz de impedancia de bus a partir de los datos del sistema sin necesidad de invertir la matriz de admitancias de bus.

5.9.1 Simplificaciones en el cálculo de fallas

Aunque, como se dijo antes, el método que se acaba de describir es un método exacto, es frecuente en el cálculo de fallas realizar las siguientes simplificaciones que no afectan en forma apreciable los resultados y que ya fueron mencionadas anteriormente:

1. No se toman en cuenta las cargas conectadas al sistema ni otras conexiones de fase a neutro, como las que representan la capacitancia de las líneas de transmisión o la excitación de los transformadores. Esto equivale a considerar que antes de la falla no circula ninguna corriente por la red.

Esta simplificación es posible por una parte porque las corrientes debidas a la falla son mucho mayores que las corrientes que circulan por los elementos capacitivos o inductivos conectados en paralelo. Por otra parte, las corrientes de falla son, en general, varias veces mayores que las corrientes que toman las cargas y están atrasadas cerca de 90° con respecto al voltaje mientras que el factor de potencia de las corrientes de carga es bastante elevado.

2. Si no se conocen los voltajes que existen en los distintos puntos de la red antes de que ocurra la falla, puede considerarse que su valor, expresado en por unidad, es igual a uno y que todos están en fase, ya que se supone que no existe ninguna corriente en el sistema antes de ocurrir la falla y por tanto no existen tampoco caídas de voltaje.
3. Frecuentemente es posible despreciar la resistencia de los elementos de la red, que en el caso de los generadores, los transformadores y las líneas de alta tensión, es mucho menor que la reactancia inductiva de los mismos.
4. La impedancia de falla se considera igual a cero, ya que para esta condición se tiene el valor máximo de la corriente de falla.

Las simplificaciones 1 y 2 permiten realizar una representación monofásica muy sencilla de una red trifásica afectada por un cortocircuito trifásico. Como se han despreciado todos los elementos pasivos conectados entre fase y neutro, incluso las cargas, el sistema antes de que se produzca el cortocircuito puede representarse como se indica en la figura 5.34.

En la figura 5.34 los generadores y motores están representados por una fuente de voltaje constante en serie con una impedancia, la cual queda incluida en la red pasiva. Todas las fuentes de voltaje tienen un valor de 1 en por unidad y están en fase, por lo que pueden sustituirse por una sola fuente de voltaje y la red pasiva puede representarse por la matriz de impedancia de bus.

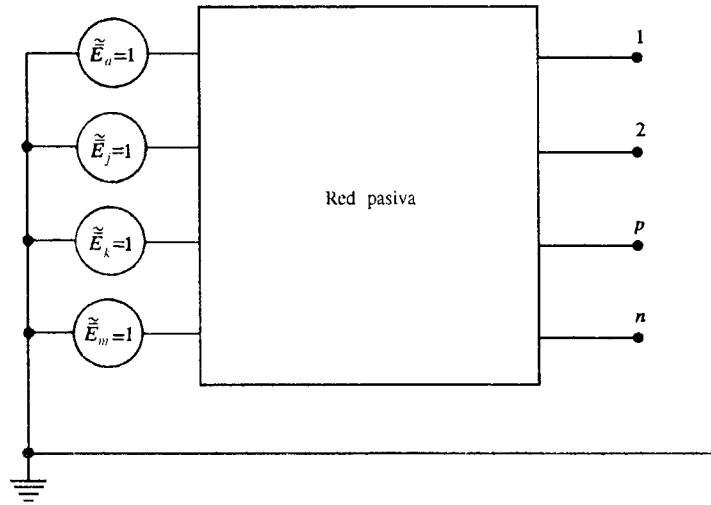


FIGURA 5.34 Representación monofásica de la red trifásica simplificada

Con esas condiciones se obtiene el circuito equivalente de la figura 5.35.

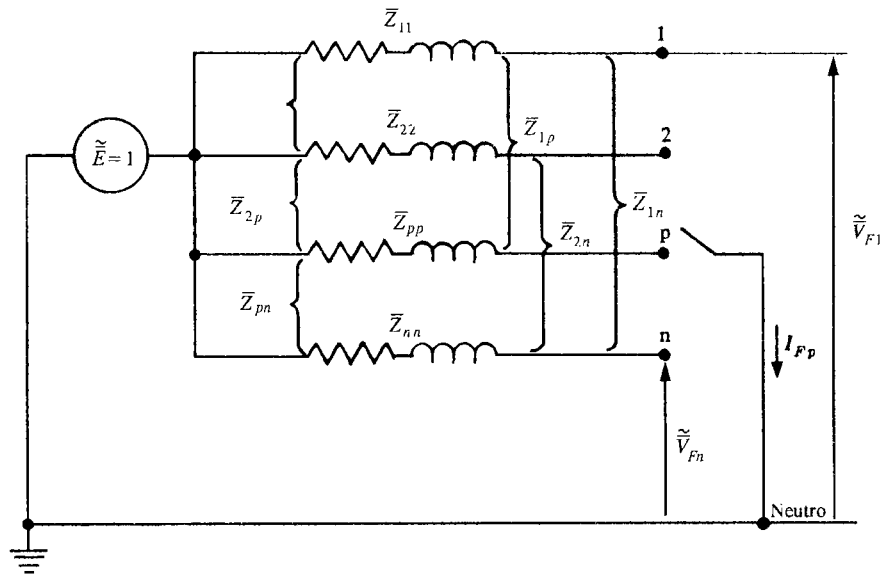


FIGURA 5.35 Representación esquemática de una red trifásica afectada por un cortocircuito en el nodo p

Si en la figura 5.35 se produce un cortocircuito en el nodo p la corriente de falla resulta ser

$$\tilde{I}_{Fp} = \frac{1}{\bar{Z}_{pp}} \quad (5.14)$$

La expresión 5.14 es igual que la 5.7 para $\bar{V}_{0p} = 1$ y $\bar{Z}_F = 0$

Los voltajes en los otros nodos durante la falla en el nodo p están dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{F_1} &= 1 - \bar{Z}_{1p} \tilde{I}_{Fp} = 1 - \frac{\bar{Z}_{1p}}{\bar{Z}_{pp}} \\ \tilde{V}_{F_2} &= 1 - \bar{Z}_{2p} \tilde{I}_{Fp} = 1 - \frac{\bar{Z}_{2p}}{\bar{Z}_{pp}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\tilde{V}_{F_n} = 1 - \bar{Z}_{np} \tilde{I}_{Fp} = 1 - \frac{\bar{Z}_{np}}{\bar{Z}_{pp}}$$

Las ecuaciones 5.15 son iguales a las 5.10 para $\tilde{V}_{01} = 1$, $\tilde{V}_{02} = 1$, $\tilde{V}_{0p} = 1$, $\tilde{V}_{0n} = 1$

EJEMPLO 5.6

Se tiene un sistema eléctrico representado por el diagrama unifilar de la figura 5.36.

Los datos de los distintos elementos que constituyen dicho sistema son los siguientes:

Generador G_A	Generador G_B
50 MVA	50 MVA
13.8 kV	6.6 kV
$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = j0.3$	$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = j0.4$
$\bar{x}_0 = j0.15$	$\bar{x}_0 = j0.2$
	$\bar{x}_n = j0.6$

Transformador T_A	Transformador T_B
50 MVA 13.2/115 kV $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_0 = j0.10$	50 MVA 6.6/115 kV $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_0 = j0.11$

Línea L_{12}	Línea L_{13}	Línea L_{23}
$Z_1 = Z_2 = 16 + j60 \Omega$ $Z_0 = 37 + j193.8 \Omega$	$Z_1 = Z_2 = 10.7 + j40 \Omega$ $Z_0 = 24.7 + j125.8 \Omega$	$Z_1 = Z_2 = 5.3 + j20 \Omega$ $Z_0 = 12.3 + j68 \Omega$

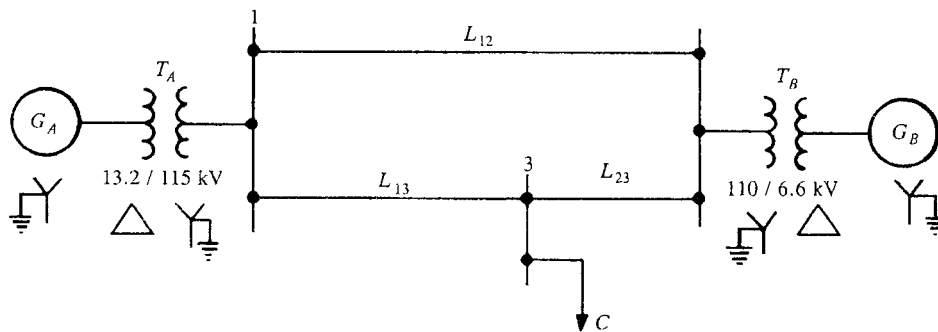


FIGURA 5.36 Diagrama unifilar del sistema del ejemplo 5.6

Para una falla trifásica en las barras 3, calcular las corrientes y voltajes en los distintos lugares del sistema durante la falla.

Supóngase que antes de la falla la carga C_3 está desconectada y el sistema está funcionando en vacío, teniendo los generadores un voltaje terminal igual a 1 en por unidad. Las resistencias y las reactancias capacitivas de los diferentes elementos del sistema se consideran despreciables.

Resuélvase el problema por el método de la matriz de impedancia de bus, con los siguientes pasos:

1. Dibujar el circuito equivalente de secuencia positiva para las condiciones antes citadas, indicando las impedancias, en por unidad, correspondientes a cada rama.
2. Calcular la matriz de admitancias de bus $[\bar{Y}_{bus}]$
3. Calcular la matriz de impedancias de bus $[\bar{Z}_{bus}] = [\bar{Y}_{bus}]^{-1}$
4. Calcular las corrientes de cortocircuito trifásico en el punto de falla, en por unidad y en amperes.
5. Calcular los voltajes de las barras 1, 2 y 3 durante la falla, en por unidad y en volts.
6. Calcular las corrientes que circulan por las líneas de transmisión y por los generadores debidas a la falla, en por unidad y en amperes.
7. Calcular las aportaciones de los generadores G_A y G_B a las corrientes de cortocircuito.

SOLUCIÓN

1. Circuito equivalente de secuencia positiva

En la figura 5.37 se muestra el circuito equivalente de secuencia positiva correspondiente al sistema de la figura 5.36 afectado por una falla trifásica en las barras 3. En dicho circuito equivalente se han despreciado las resistencias y las reactancias capacitivas de los diferentes elementos del sistema, indicando el valor de las reactancias inductivas en por unidad, referidas a una base de potencia trifásica de 50 MVA y a las siguientes bases de voltaje entre líneas.

Para la línea de transmisión se adoptó una base de voltaje entre líneas de 110 kV. Con las relaciones de transformación indicadas, resultan las siguientes bases de voltaje entre líneas del lado de baja de los transformadores.

$$\text{Del lado del generador } G_A \quad 110 \times \frac{13.2}{115} = 12.63 \text{ kV}$$

$$\text{Del lado del generador } G_B \quad 110 \times \frac{6.6}{110} = 6.6 \text{ kV}$$

Las impedancias inductivas de secuencia positiva, negativa y cero de las líneas, en por unidad, referidas a las bases mencionadas, tienen los siguientes valores:

$$\text{Base de impedancia en las líneas } \frac{110^2}{50} = 242 \text{ } \Omega$$

$$\text{Línea } L_{12} \quad Z_1 = Z_2 = \frac{16 + j60}{242} = 0.066 + j0.249$$

$$Z_0 = \frac{37 + j193.8}{243} = 0.153 + j0.801$$

$$\text{Línea } L_{13} \quad Z_1 = Z_2 = \frac{10.7 + j40}{242} = 0.044 + j0.166$$

$$Z_0 = \frac{24.7 + j125.8}{242} = 0.102 + j0.520$$

Línea L_{23} $Z_1 = Z_2 = \frac{5.3 + j20}{242} = 0.022 + j0.083$

$$Z_0 = \frac{12.3 + j68}{242} = 0.51 + j0.280$$

Las reactancias del generador G_A , referidas a la base de voltaje de 12.63 kV, tienen los siguientes valores:

$$\bar{X}_1 = j0.3 \left(\frac{13.8}{12.63} \right)^2 = j0.358$$

$$\bar{X}_1 = j0.4 \left(\frac{13.8}{12.63} \right)^2 = j0.478$$

$$\bar{X}_0 = j0.15 \left(\frac{13.8}{12.63} \right)^2 = j0.179$$

Las reactancias del transformador T_A , referidas a las bases de voltaje 12.63/110 kV, tienen el siguiente valor:

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_0 = j0.10 \left(\frac{115}{110} \right)^2 = j0.109$$

Las reactancias, en por unidad, del generador G_B y el transformador T_B están referidas a las bases seleccionadas, por lo que no requieren referirse a nuevas bases.

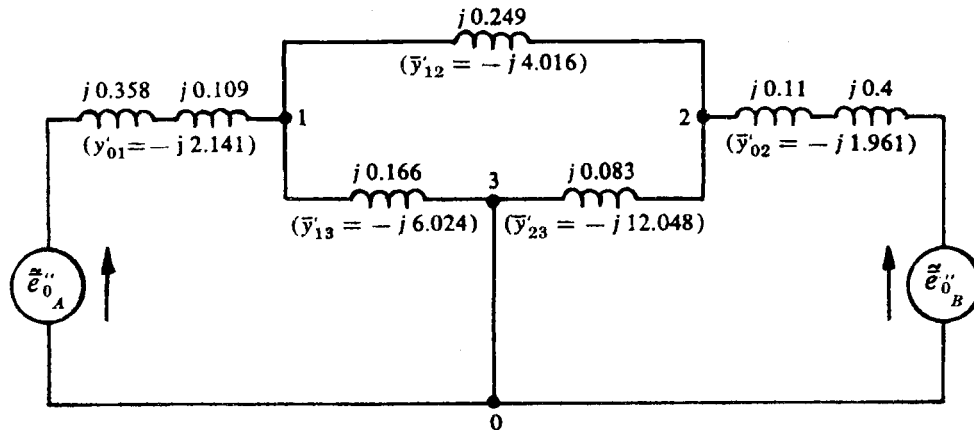


FIGURA 5.37 Circuito equivalente de secuencia positiva del sistema del ejemplo 5.6, en el que se indican las reactancias de secuencia positiva de las ramas y entre paréntesis las admitancias de secuencia positiva correspondientes

A continuación se calculan las admitancias de secuencia positiva de las ramas del circuito equivalente de la figura 5.34

$$\bar{y}_{01}^{-1} = \frac{1}{j0.358 + j0.109} = -j2.141$$

$$\bar{y}_{02}^{-1} = \frac{1}{j0.11 + j0.4} = -j1.961$$

$$\bar{y}_{12}^{-1} = \frac{1}{j0.249} = -j4.016$$

$$\bar{y}_{13}^{-1} = \frac{1}{j0.166} = -j6.024$$

$$\bar{y}_{23}^{-1} = \frac{1}{j0.083} = -j12.048$$

Estas admitancias se indican entre paréntesis en la figura 5.37, en las ramas correspondientes.

2. Cálculo de la matriz de admitancias de bus de secuencia positiva

$$\bar{Y}_{11}^1 = -j(2.141 + 4.016 + 6.024) = -j12.181$$

$$\bar{Y}_{22}^1 = -j(1.961 + 4.016 + 12.048) = -j18.025$$

$$\bar{Y}_{33}^1 = -j(6.024 + 12.048) = -j18.072$$

$$\bar{Y}_{12}^1 = \bar{Y}_{21}^1 = -(-j4.016) = j4.016$$

$$\bar{Y}_{13}^1 = \bar{Y}_{31}^1 = -(-j6.024) = j6.024$$

$$\bar{Y}_{23}^1 = \bar{Y}_{32}^1 = -(-j12.048) = j12.048$$

$$[\bar{Y}_{bus}^1] = j \begin{bmatrix} -12.181 & 4.016 & 6.024 \\ 4.016 & -18.025 & 12.048 \\ 6.024 & 12.048 & -18.072 \end{bmatrix}$$

3. Cálculo de la matriz de impedancias de bus de secuencia positiva

$$[Z_{bus}^1] = [\bar{Y}_{bus}^1]^{-1}$$

Cálculo de los menores del determinante

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -18.025 & 12.048 \\ 12.048 & -18.072 \end{vmatrix} = 325.7 - 145.2 = 180.5$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4.016 & 12.048 \\ 6.024 & -18.072 \end{vmatrix} = -72.6 - 72.6 = -145.2$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4.016 & -18.025 \\ 6.024 & 12.048 \end{vmatrix} = 48.4 + 108.6 = 157.0$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 4.016 & 6.024 \\ 12.048 & -18.072 \end{vmatrix} = -72.6 - 72.6 = -145.2$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -12.181 & 6.024 \\ 6.024 & -18.072 \end{vmatrix} = 220.1 - 36.3 = 183.8$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -12.181 & 4.016 \\ 6.024 & 12.048 \end{vmatrix} = -146.8 - 24.2 = -171.0$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 4.016 & 6.024 \\ -18.025 & 12.048 \end{vmatrix} = 48.4 + 108.6 = 157.0$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -12.181 & 6.024 \\ 4.016 & 12.048 \end{vmatrix} = -146.8 - 24.2 = -171.0$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} -12.181 & 4.016 \\ 4.016 & -18.025 \end{vmatrix} = 219.6 - 16.1 = 203.5$$

Matriz de los cofactores (como es simétrica es igual a su transpuesta)

$$\begin{bmatrix} 180.5 & +145.2 & 157.0 \\ +145.2 & 183.8 & +171.0 \\ 157.0 & 171.0 & 203.5 \end{bmatrix}$$

Valor del determinante de la matriz $[Y_{bus}^1]$

$$\begin{aligned} D &= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} \\ &= -12.181 \times 180.5 - 4.016(-145.2) + 6.024 \times 157.0 \\ &= -2198.7 + 583.1 + 945.8 = -669.8 \end{aligned}$$

Dividiendo cada elemento de la matriz transpuesta de los cofactores por el valor del determinante, teniendo en cuenta que $\frac{1}{j} = -j$

$$[Z_{bus}^1] = [Y_{bus}^1]^{-1} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} -0.269 & -0.217 & -0.234 \\ -0.217 & -0.274 & -0.255 \\ -0.234 & -0.255 & -0.304 \end{bmatrix}$$

$$[Z_{bus}^1] = j \begin{bmatrix} 0.269 & 0.217 & 0.234 \\ 0.217 & 0.274 & 0.255 \\ 0.234 & 0.255 & 0.304 \end{bmatrix}$$

4. Corriente de cortocircuito trifásico en el punto de falla

$$\tilde{I}_{F_3} = \frac{1}{Z_{33}} = \frac{1}{j0.304} = -j3.289$$

La base de corriente correspondiente es

$$I_B^L = \frac{50000}{110\sqrt{3}} = 262.4 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{F_3} = -j3.289 \times 262.4 = -j863.0 \text{ A}$$

5. Voltajes en las barras 1, 2 y 3 durante la falla

$$\tilde{V}_{F_1} = \tilde{V}_{10} - \bar{Z}_{13} \tilde{I}_{F_3} = 1 - j0.234(-j3.289) = 0.230$$

$$\tilde{V}_{F_1} = \tilde{V}_{10} - \frac{\bar{Z}_{13}}{\bar{Z}_{33}} = 1 - \frac{j0.234}{j0.304} = 0.230$$

$$\tilde{V}_{F_2} = \tilde{V}_{20} - \frac{\bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{33}} = 1 - \frac{j0.255}{j0.304} = 0.161$$

$$\tilde{V}_{F_3} = 0$$

$$V_{B_l} = 110 \text{ kV}$$

$$V_{B_n} = \frac{110}{\sqrt{3}} = 63.508 \text{ kV}$$

$$\tilde{V}_{F_{1_l}} = 0.230 \times 110 = 25.3 \text{ kV}$$

$$\tilde{V}_{F_{1_n}} = 0.230 \times 63.508 = 14.607 \text{ kV}$$

$$\tilde{V}_{F_{2_l}} = 0.161 \times 110 = 17.71 \text{ kV}$$

$$\tilde{V}_{F_{2_n}} = 0.161 \times 63.508 = 10.228 \text{ kV}$$

6. Corrientes, en por unidad, que circulan por cada fase de las líneas de transmisión y de los generadores debidas a las fallas trifásica en la barra 3

$$\tilde{I}_{12} = \bar{Y}_{12} (\tilde{V}_{F_1} - \tilde{V}_{F_2}) = -j4.016(0.230 - 0.161) = -j0.277$$

$$\tilde{I}_{13} = \bar{Y}_{13} (\tilde{V}_{F_1} - \tilde{V}_{F_3}) = -j6.024(0.230 - 0) = -j1.386$$

$$\tilde{I}_{23} = \bar{Y}_{23} (\tilde{V}_{F_2} - \tilde{V}_{F_3}) = -j12.048(0.161 - 0) = -j1.940$$

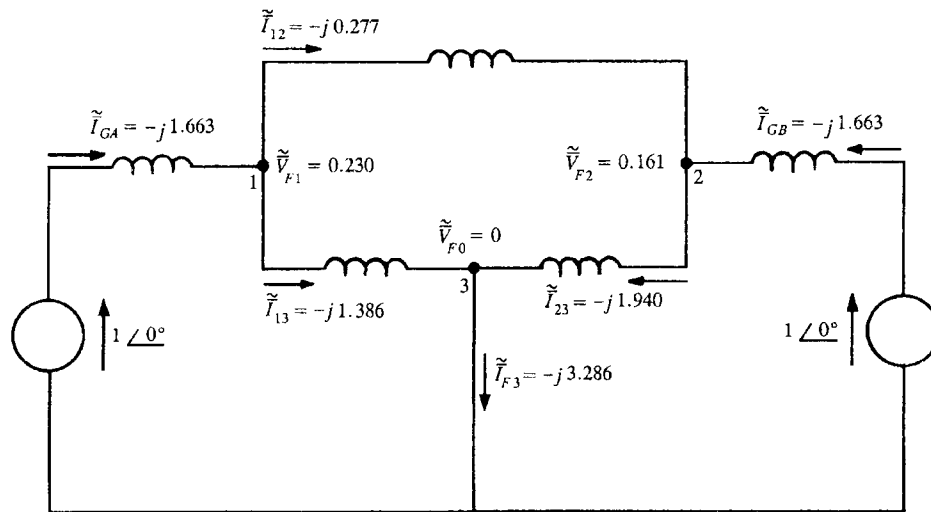


FIGURA 5.38 Corrientes, en por unidad que circulan por las ramas de la red

$$\tilde{I}_{G_A} = (-j0.277) + (-j1.386) = -j1.663$$

$$\tilde{I}_{G_B} = (-j1.940) - (-j0.277) = -j1.663$$

Comprobación

$$\tilde{I}_{F_3} = \tilde{I}_{G_A} + \tilde{I}_{G_B} \text{ con un error del } 1.1\%$$

7. Corrientes, en amperes, que circulan por cada fase de las líneas de transmisión durante la falla

$$I_B^L = \frac{50000}{110\sqrt{3}} = 262.4 \text{ A}$$

Línea 1-2

$$\tilde{I}_{12}^A = 262.4 \times 0.277 \angle -90^\circ = 72.7 \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{12}^B = 262.4 \times 0.277 \angle 150^\circ = 72.7 \angle 150^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{12}^C = 262.4 \times 0.277 \angle 30^\circ = 72.7 \angle 30^\circ \text{ A}$$

Línea 1-3

$$\tilde{I}_{13}^A = 262.4 \times 1.386 \angle -90^\circ = 363.7 \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{13}^B = 262.4 \times 1.386 \angle 150^\circ = 363.7 \angle 150^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{13}^C = 262.4 \times 1.386 \angle 30^\circ = 363.7 \angle 30^\circ \text{ A}$$

Línea 2-3

$$\tilde{I}_{23}^A = 262.4 \times 1.940 \angle -90^\circ = 509.1 \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{23}^B = 262.4 \times 1.940 \angle 150^\circ = 509.1 \angle 150^\circ \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{23}^C = 262.4 \times 1.940 \angle 30^\circ = 509.1 \angle 30^\circ \text{ A}$$

8. Corrientes, en amperes, que circulan por cada fase del generador G_A durante la falla

$$\tilde{I}_B^{G_A} = \frac{50\,000}{12.63\sqrt{3}} = 2\,285.6 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{G_A}^A = 2\,285.6 \times 1.663 \angle -90^\circ \angle -30^\circ = 3\,801.0 \angle -120^\circ$$

$$\tilde{I}_{G_A}^B = 2\,285.6 \times 1.663 \angle 150^\circ \angle -30^\circ = 3\,801.0 \angle 120^\circ$$

$$\tilde{I}_{G_A}^C = 2\,285.6 \times 1.663 \angle 30^\circ \angle -30^\circ = 3\,801.0 \angle 0^\circ$$

9. Corrientes, en amperes, que circulan por cada fase del generador G_B durante la falla

$$\tilde{I}_{G_B} = \frac{50\,000}{6.6\sqrt{3}} = 4\,373.9 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{G_B}^A = 4\,373.9 \times 1.663 \angle -90^\circ \angle -30^\circ = 7\,273.8 \angle -120^\circ$$

$$\tilde{I}_{G_B}^B = 4\,373.9 \times 1.663 \angle 150^\circ \angle -30^\circ = 7\,273.8 \angle -120^\circ$$

$$\tilde{I}_{G_B}^C = 4\,373.9 \times 1.663 \angle 30^\circ \angle -30^\circ = 7\,273.8 \angle 0^\circ$$

Con respecto a los ángulos de las corrientes que circulan por las tres fases de los generadores G_A y G_B debe recordarse que, debido a la conexión estrella/delta de los transformadores T_A y T_B , las corrientes de línea del lado de la delta están atrasadas 30° eléctricos con respecto a las del lado de la estrella (despreciando la corriente de excitación de los transformadores).

5.10 Fallas desequilibradas

Para el cálculo de fallas desequilibradas por el método de las componentes simétricas es necesario establecer los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero del sistema e interconectarlos de acuerdo con el tipo de falla.

En este caso se puede sistematizar el cálculo generalizando el método de la matriz de impedancias de bus, para lo cual se establecen las matrices de impedancia de bus de secuencia positiva, negativa y cero.

$$[\bar{Z}_{bus}^1] = \begin{bmatrix} Z_{11}^1 & Z_{12}^1 & \dots & Z_{1n}^1 \\ Z_{21}^1 & Z_{22}^1 & \dots & Z_{2n}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1}^1 & Z_{n2}^1 & \dots & Z_{nn}^1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{Z}_{bus}^2] = \begin{bmatrix} Z_{11}^2 & Z_{12}^2 & \dots & Z_{1n}^2 \\ Z_{21}^2 & Z_{22}^2 & \dots & Z_{2n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1}^2 & Z_{n2}^2 & \dots & Z_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{Z}_{bus}^0] = \begin{bmatrix} Z_{11}^0 & Z_{12}^0 & \dots & Z_{1n}^0 \\ Z_{21}^0 & Z_{22}^0 & \dots & Z_{2n}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1}^0 & Z_{n2}^0 & \dots & Z_{nn}^0 \end{bmatrix}$$

Haciendo las simplificaciones 1 y 2 mencionadas en la sección anterior, dichas matrices de impedancia de bus pueden representarse por circuitos equivalentes como los mostrados en la figura 5.39. En dicha figura se han interconectado los tres circuitos equivalentes para representar una falla monofásica en el nodo p .

En el circuito de la figura 5.39 se verifica que

$$I_p^1 = I_p^2 = I_p^0 = \frac{1}{Z_{pp}^1 + Z_{pp}^2 + Z_{pp}^0}$$

Los tres circuitos equivalentes podrían haberse interconectado para representar una falla bifásica a tierra en el nodo p , en cuyo caso las componentes simétricas de la corriente de falla serían

$$\tilde{I}_p^1 = \frac{1}{\bar{Z}_{pp}^1 + \frac{\bar{Z}_{pp}^2 \bar{Z}_{pp}^0}{\bar{Z}_{pp}^2 + \bar{Z}_{pp}^0}}$$

$$\tilde{I}_p^2 = \frac{\bar{Z}_{pp}^0}{\bar{Z}_{pp}^2 + \bar{Z}_{pp}^0} \tilde{I}_p^1$$

$$\tilde{I}_p^0 = \frac{\bar{Z}_{pp}^2}{\bar{Z}_{pp}^2 + \bar{Z}_{pp}^0} \tilde{I}_p^1$$

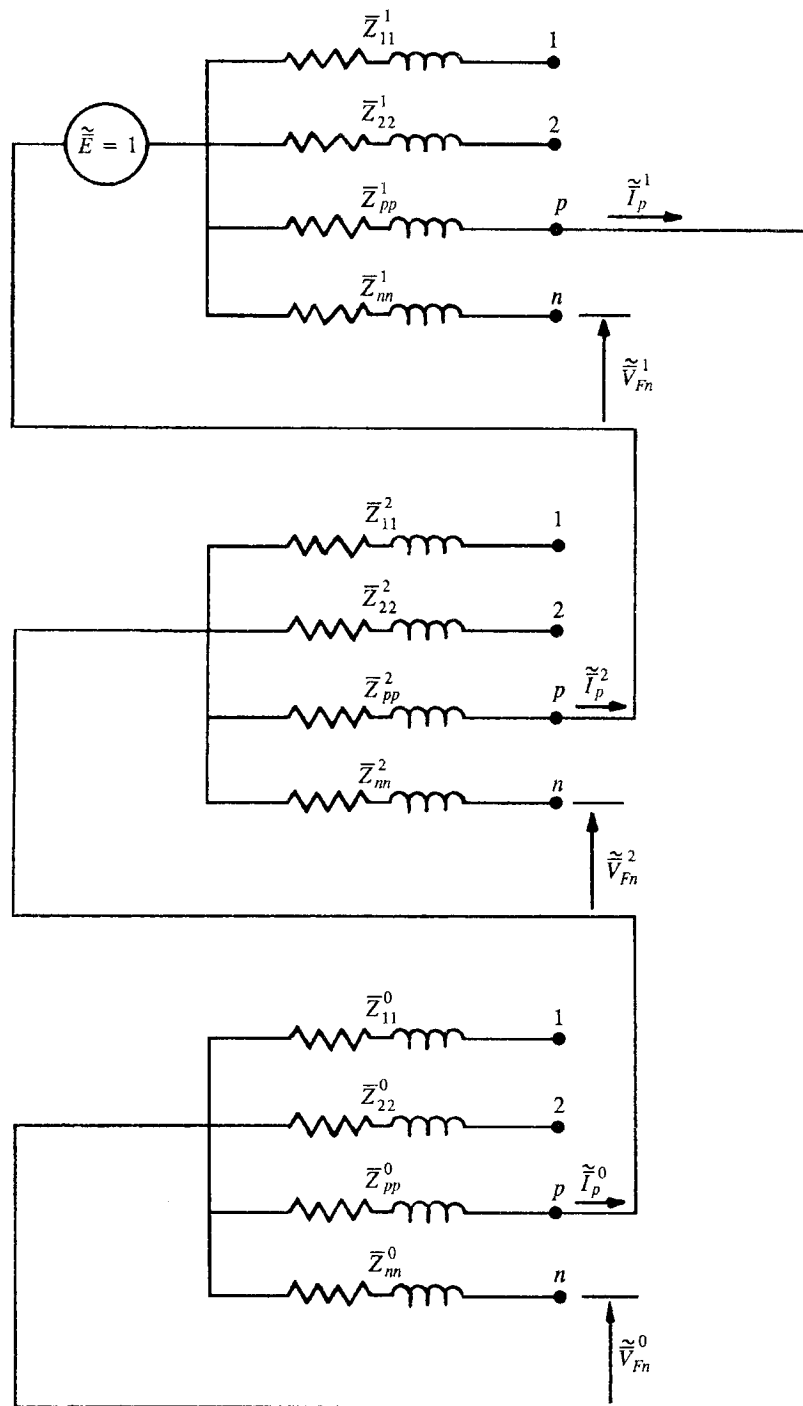


FIGURA 5.39 Interconexión de los circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero para representar las condiciones debidas a una falla monofásica a tierra en el punto p

La conexión correspondiente al caso de una falla entre dos fases en el nodo p resultaría en las siguientes componentes simétricas de la corriente de falla:

$$\tilde{I}_p^1 = -\tilde{I}_p^2 = \frac{1}{Z_{pp}^1 + Z_{pp}^2}$$

$$\tilde{I}_p^0 = 0$$

Por último, la conexión correspondiente a una falla trifásica resultaría en

$$\tilde{I}_p^1 = \frac{1}{Z_{pp}^1}$$

$$\tilde{I}_p^2 = 0$$

$$\tilde{I}_p^0 = 0$$

Una vez calculadas las componentes simétricas de la corriente de falla, las corrientes de fase correspondientes en el nodo p se obtienen por la transformación

$$\tilde{I}_p^a = \tilde{I}_p^1 + \tilde{I}_p^2 + \tilde{I}_p^0$$

$$\tilde{I}_p^b = a^2 \tilde{I}_p^1 + a \tilde{I}_p^2 + \tilde{I}_p^0$$

$$\tilde{I}_p^c = a \tilde{I}_p^1 + a^2 \tilde{I}_p^2 + \tilde{I}_p^0$$

Las componentes de secuencia positiva, negativa y cero de los voltajes en los nodos 1, 2, ... n , durante una falla en p se obtienen restando de los voltajes que había antes de la falla los cambios de voltaje producidos por la falla, los cuales se obtienen a su vez mediante las impedancias de transferencia correspondientes. Por ejemplo, para el nodo n

$$\tilde{V}_{Fn}^1 = 1 - \bar{Z}_{np}^1 \tilde{I}_p^1$$

$$\tilde{V}_{Fn}^2 = 0 - \bar{Z}_{np}^2 \tilde{I}_p^2$$

$$\tilde{V}_{Fn}^0 = 0 - \bar{Z}_{np}^0 \tilde{I}_p^0$$

Una vez calculadas las componentes simétricas del voltaje en un nodo, los voltajes de fase se calculan mediante la transformación

$$\widetilde{\bar{V}}_{Fn}^a = \widetilde{\bar{V}}_n^1 + \widetilde{\bar{V}}_n^2 + \widetilde{\bar{V}}_n^0$$

$$\widetilde{\bar{V}}_{Fn}^b = a^2 \widetilde{\bar{V}}_n^1 + a \widetilde{\bar{V}}_n^2 + \widetilde{\bar{V}}_n^0$$

$$\widetilde{\bar{V}}_{Fn}^c = a \widetilde{\bar{V}}_n^1 + a^2 \widetilde{\bar{V}}_n^2 + \widetilde{\bar{V}}_n^0$$

Una vez calculados los voltajes de secuencia positiva, negativa y cero en cada nodo de la red, pueden calcularse las corrientes de secuencia positiva, negativa y cero que circulan por cada rama de la red durante el cortocircuito mediante las siguientes expresiones:

$$\widetilde{\bar{I}}_{jk}^1 = \bar{Y}_{jk}^1 (\widetilde{\bar{V}}_j^1 - \widetilde{\bar{V}}_k^1)$$

$$\widetilde{\bar{I}}_{jk}^2 = \bar{Y}_{jk}^2 (\widetilde{\bar{V}}_j^2 - \widetilde{\bar{V}}_k^2)$$

$$\widetilde{\bar{I}}_{jk}^0 = \bar{Y}_{jk}^0 (\widetilde{\bar{V}}_j^0 - \widetilde{\bar{V}}_k^0)$$

donde

$\bar{Y}_{jk}^1, \bar{Y}_{jk}^2, \bar{Y}_{jk}^0$ admitancias de secuencia positiva, negativa y cero de la rama comprendida entre el nodo j y k

$\widetilde{\bar{V}}_{Fj}^1, \widetilde{\bar{V}}_{Fj}^2, \widetilde{\bar{V}}_{Fj}^0$ voltajes de secuencia positiva, negativa y cero del nodo j

$\widetilde{\bar{V}}_{Fk}^1, \widetilde{\bar{V}}_{Fk}^2, \widetilde{\bar{V}}_{Fk}^0$ voltajes de secuencia positiva, negativa y cero del nodo k

$\widetilde{\bar{I}}_{jk}^1, \widetilde{\bar{I}}_{jk}^2, \widetilde{\bar{I}}_{jk}^0$ corrientes de secuencia positiva, negativa y cero que circulan por la rama comprendida entre los nodos j y k

Una vez conocidas las componentes simétricas de las corrientes en la rama jk , las corrientes de fase pueden calcularse mediante la siguiente transformación:

$$\widetilde{\bar{I}}_{jk}^a = \widetilde{\bar{I}}_{jk}^1 + \widetilde{\bar{I}}_{jk}^2 + \widetilde{\bar{I}}_{jk}^0$$

$$\widetilde{\bar{I}}_{jk}^b = a^2 \widetilde{\bar{I}}_{jk}^1 + a \widetilde{\bar{I}}_{jk}^2 + \widetilde{\bar{I}}_{jk}^0$$

$$\widetilde{\bar{I}}_{jk}^c = a \widetilde{\bar{I}}_{jk}^1 + a^2 \widetilde{\bar{I}}_{jk}^2 + \widetilde{\bar{I}}_{jk}^0$$

EJEMPLO 5.7

En el mismo sistema eléctrico del ejemplo 5.6 ocurre un cortocircuito de una fase a tierra en las barras 3.

Calcular la corriente de cortocircuito en el punto de falla y las corrientes resultantes en las distintas ramas de la red, haciendo las mismas suposiciones y simplificaciones que se hicieron para resolver el ejemplo 5.6, utilizando también el método de las matrices de impedancias de bus.

SOLUCIÓN

1. Circuitos equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero

El circuito equivalente de secuencia positiva es el mismo que se estableció al resolver el problema.

El circuito equivalente de secuencia negativa se supone igual al de secuencia positiva.

El circuito equivalente queda como se indica en la figura 5.40, en la que se muestra también el circuito equivalente de secuencia cero y la interconexión de los tres circuitos para representar las condiciones de una falla a tierra de una de las fases de las barras 3.

En la figura 5.40 se indican las reactancias de secuencia positiva, negativa y cero, en por unidad, de cada rama y entre paréntesis las admitancias correspondientes.

2. Matrices de impedancias de bus

- a) La matriz de impedancias de bus de secuencia positiva ya se calculó en el ejemplo 5.6. La de secuencia negativa se supone igual a la de secuencia positiva

$$\begin{bmatrix} Z_{bus}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{bus}^2 \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} 0.269 & 0.217 & 0.234 \\ 0.217 & 0.274 & 0.255 \\ 0.234 & 0.255 & 0.304 \end{bmatrix}$$

- b) Cálculo de la matriz de admitancias de bus de secuencia cero

Las admitancias de las ramas del circuito equivalente de secuencia cero son

$$\bar{y}_{01}^{-1} = \frac{1}{j0.109} = -j9.174$$

$$\bar{y}_{02}^{-2} = \frac{1}{j0.110} = -j9.091$$

$$\bar{y}_{12}^{-1} = \frac{1}{j0.801} = -j1.248$$

$$\bar{y}_{13}^{-1} = \frac{1}{j0.520} = -j1.923$$

$$\bar{y}_{23}^{-1} = \frac{1}{j0.281} = -j3.559$$

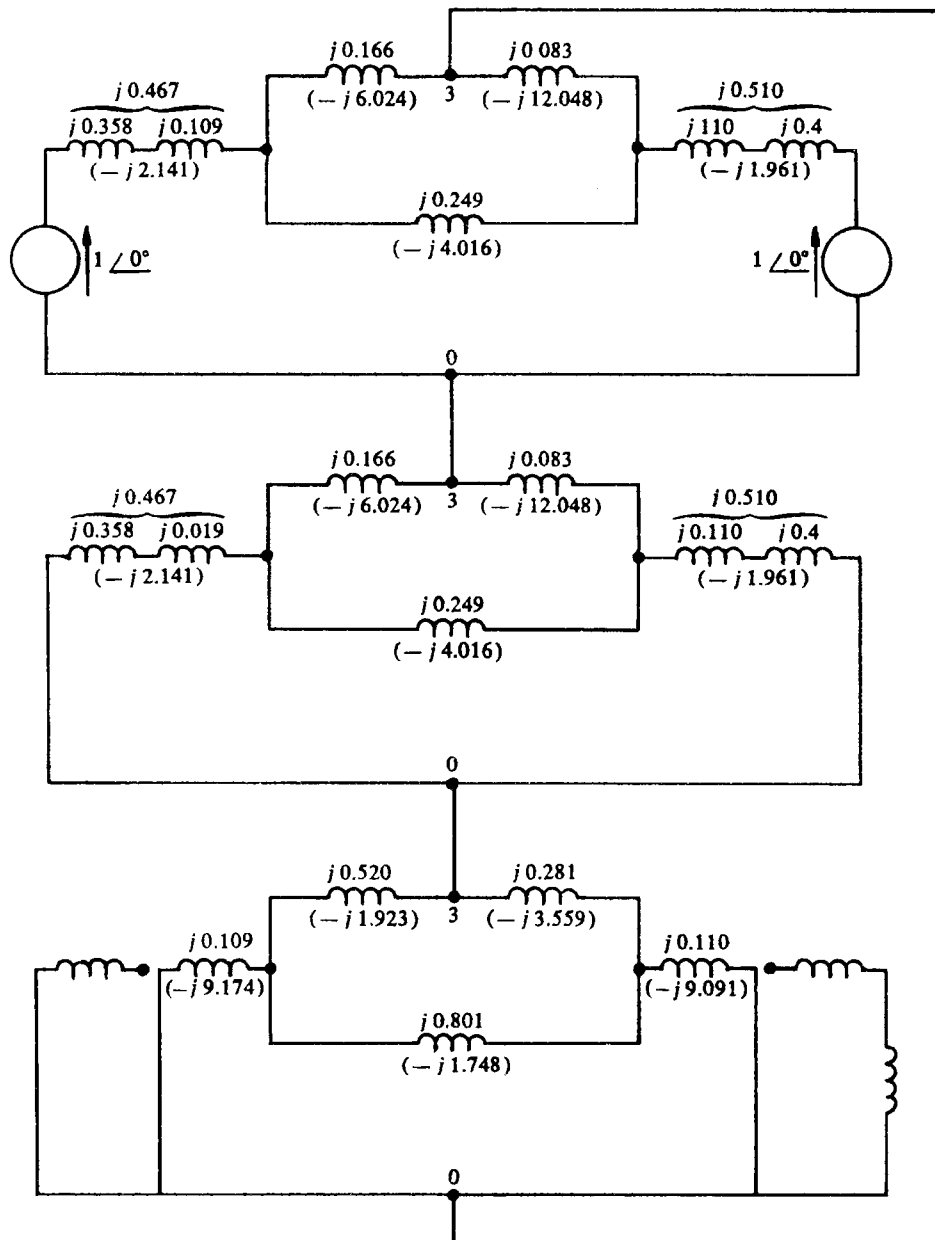


FIGURA 5.40 Circuito equivalentes de secuencia positiva, negativa y cero correspondientes al sistema del ejemplo 5.7, interconectados para representar una falla monofásica en las barras 3

Matriz de admitancias de bus de secuencia cero $[Y_{bus}^0]$

$$\bar{Y}_{11}^0 = -j(9.174 + 1.248 + 1.923) = -j12.345$$

$$\bar{Y}_{22}^0 = -j(9.091 + 1.248 + 3.559) = -j13.898$$

$$\bar{Y}_{33}^0 = -j(1.923 + 3.559) = -j5.482$$

$$\bar{Y}_{12}^0 = \bar{Y}_{21}^0 = -(-j1.248) = j1.248$$

$$\bar{Y}_{13}^0 = \bar{Y}_{31}^0 = -(-j1.923) = j1.923$$

$$\bar{Y}_{23}^0 = \bar{Y}_{32}^0 = -(-j3.559) = j3.559$$

$$[\bar{Y}_{bus}^0] = j \begin{bmatrix} -12.345 & 1.248 & 1.923 \\ 1.248 & -13.898 & 3.559 \\ 1.923 & 3.559 & -5.482 \end{bmatrix}$$

c) Cálculo de la matriz de impedancias de bus de secuencia cero $[Z_{bus}^0]$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -13.898 & 3.559 \\ 3.559 & -5.482 \end{vmatrix} = 76.19 - 12.67 = 63.52$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1.248 & 3.559 \\ 1.923 & -5.482 \end{vmatrix} = -6.84 - 6.84 = -13.68$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1.248 & -13.898 \\ 1.923 & 3.559 \end{vmatrix} = 4.44 + 26.73 = 31.17$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1.248 & 1.923 \\ 3.559 & -5.482 \end{vmatrix} = -6.84 - 6.84 = -13.68$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -12.345 & 1.923 \\ 1.923 & -5.482 \end{vmatrix} = 67.68 - 3.70 = 63.98$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -12.345 & 1.248 \\ 1.923 & 3.559 \end{vmatrix} = -43.94 - 2.40 = -46.34$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1.248 & 1.923 \\ -13.898 & 3.559 \end{vmatrix} = 4.44 + 26.73 = 31.17$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -12.345 & 1.923 \\ 1.248 & 3.559 \end{vmatrix} = -43.94 - 2.40 = -46.34$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} -12.345 & 1.248 \\ 1.248 & -13.898 \end{vmatrix} = 171.57 - 1.56 = 170.01$$

Matriz de los cofactores (como es simétrica es igual a su transpuesta)

$$\begin{bmatrix} 63.52 & +13.68 & 31.17 \\ +13.68 & 63.98 & +46.34 \\ 31.17 & +46.34 & 170.01 \end{bmatrix}$$

Valor del determinante de la matriz Y_{bus}^0

$$\begin{aligned} D &= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} \\ &= -12.345 \times 63.52 - 1.248(-13.68) + 1.923 \times 31.17 \\ D &= -748.15 + 17.07 + 59.94 = -707.14 \end{aligned}$$

Dividiendo cada elemento de la matriz anterior por el valor el determinante

$$[Z_{bus}^0] = [Y_{bus}^0]^{-1} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} -0.09 & -0.019 & -0.044 \\ -0.019 & -0.090 & -0.066 \\ -0.044 & -0.066 & -0.240 \end{bmatrix}$$

$$[Z_{bus}^0] = j \begin{bmatrix} 0.090 & 0.019 & 0.044 \\ 0.019 & 0.090 & 0.066 \\ 0.044 & 0.066 & 0.240 \end{bmatrix}$$

d) En la figura 5.41 se muestra el circuito equivalente para el cálculo de las condiciones producidas por un cortocircuito a tierra de una de las fases de las barras 3, usando el método de las matrices de impedancias de bus.

3. Cálculo de la corriente en el punto de falla

$$\tilde{I}_3^1 = \tilde{I}_3^2 = \tilde{I}_3^0 = \frac{1 \angle 0^\circ}{j(0.304 + 0.304 + 0.240)} = \frac{1 \angle 0^\circ}{j0.848} = -j1.179$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{I}_3^a \\ \tilde{I}_3^b \\ \tilde{I}_3^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j1.179 \\ -j1.179 \\ -j1.179 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{I}_3^a = -j1.179 \times 3 = -j3.537$$

$$\tilde{I}_3^b = -j1.179(a^2 + a + 1) = 0$$

$$\tilde{I}_3^c = -j1.179(a + a^2 + 1) = 0$$

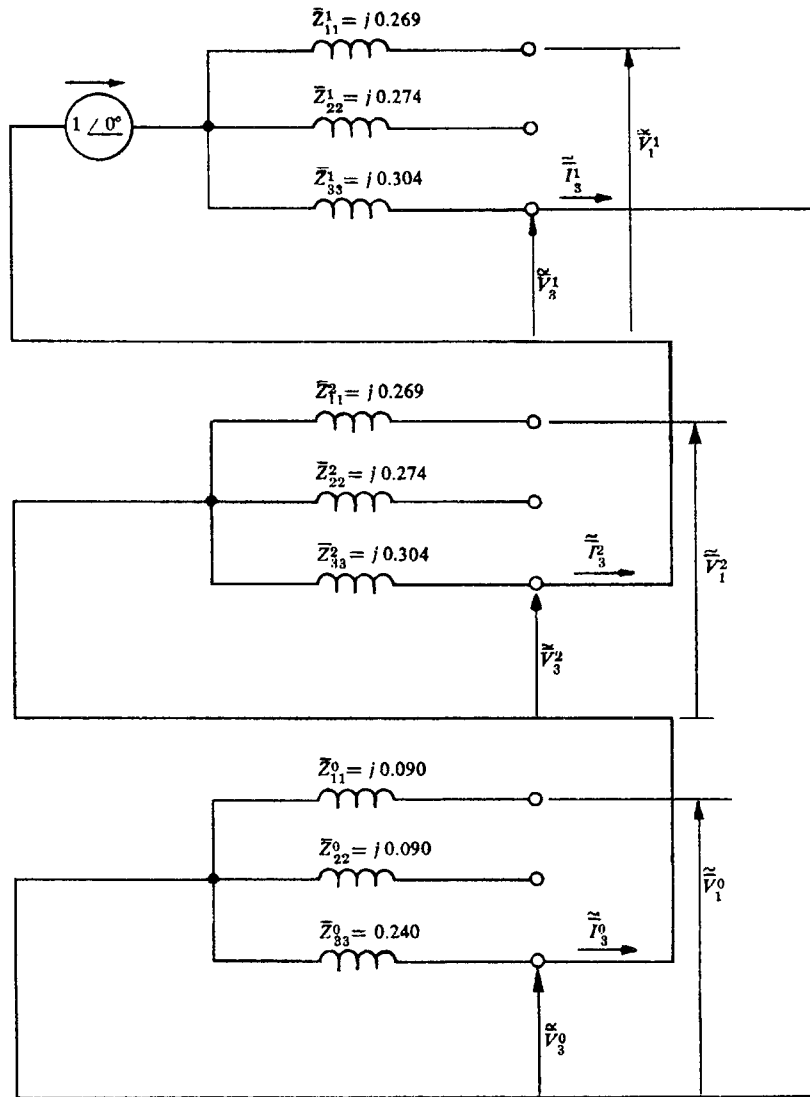


FIGURA 5.41 Circuito equivalente para representar las condiciones debidas a un cortocircuito a tierra en una fase de las barras 3

a) Corriente en el punto de falla en amperes

$$I_B = \frac{50\,000}{110\sqrt{3}} = 262.4 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_3^a = -j3.537 \times 262.4 = -j928.1 \text{ A}$$

4. Cálculo de los voltajes durante la falla

a) Voltajes de secuencia positiva, negativa y cero de la fase a de las barras 3 (antes del cortocircuito el voltaje de secuencia positiva era igual a 1 y los de secuencia negativa y cero iguales a cero):

$$\tilde{V}_3^1 = 1 - Z_{33}^1 \tilde{I}_3^1 = 1 - j0.304 (-j1.179) = 0.642$$

$$\tilde{V}_3^2 = 0 - Z_{33}^2 \tilde{I}_3^2 = 0 - j0.304 (-j1.179) = -0.358$$

$$\tilde{V}_3^0 = 0 - Z_{33}^0 \tilde{I}_3^0 = 0 - j0.240 (-j1.179) = -0.283$$

b) Voltajes en las fases a , b y c de las barras 3

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_3^a \\ \tilde{V}_3^b \\ \tilde{V}_3^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.642 \\ -0.358 \\ -0.283 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{V}_3^a = 0.642 - 0.358 - 0.283 = 0$$

$$\tilde{V}_3^b = 0.642a^2 - 0.358a - 0.283 = 0.965 \angle 243.9^\circ$$

$$\tilde{V}_3^c = 0.642a - 0.358a^2 - 0.283 = 0.965 \angle 116.1^\circ$$

Voltajes al neutro en las barras 3 en volts

$$V_{B_n} = \frac{110}{\sqrt{3}} = 63.509 \text{ kV}$$

$$\tilde{V}_3^a = 0(63.509) = 0 \text{ kV}$$

$$\tilde{V}_3^b = (0.965 \angle 243.9^\circ) 63.509 = 61.286 \angle 243.9^\circ \text{ kV}$$

$$\tilde{V}_3^c = (0.965 \angle 116.1^\circ) 63.509 = 61.286 \angle 116.1^\circ \text{ kV}$$

- c) Voltajes de secuencia positiva, negativa y cero de la fase a de las barras 1 (antes del cortocircuito el voltaje de secuencia positiva era igual a 1 y a los de secuencia negativa y cero iguales a cero)

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{V}}_1^1 &= 1 - \bar{Z}_{13}^1 \tilde{\tilde{I}}_3^1 = 1 - j0.234 (-j1.179) = 0.724 \\ \tilde{\tilde{V}}_1^2 &= 0 - \bar{Z}_{13}^2 \tilde{\tilde{I}}_3^2 = 0 - j0.234 (-j1.179) = -0.276 \\ \tilde{\tilde{V}}_1^0 &= 0 - \bar{Z}_{13}^0 \tilde{\tilde{I}}_3^0 = 0 - j0.044 (-j0.179) = -0.052\end{aligned}$$

- d) Voltajes en las fases a , b y c de las barras 1

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{V}}_1^a \\ \tilde{\tilde{V}}_1^b \\ \tilde{\tilde{V}}_1^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.724 \\ -0.276 \\ -0.052 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{V}}_1^a &= 0.724 - 0.276 - 0.052 = 0.396 \angle 0^\circ \\ \tilde{\tilde{V}}_1^b &= 0.724a^2 - 0.276a - 0.052 = 0.090 \angle 252.3^\circ \\ \tilde{\tilde{V}}_1^c &= 0.724a - 0.276a^2 - 0.052 = 0.909 \angle 107.7^\circ\end{aligned}$$

Voltajes al neutro en las barras 1 en volts

$$V_{B_n} = \frac{110}{\sqrt{3}} = 63.509 \text{ kV}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{V}}_1^a &= (0.396 \angle 0^\circ) 63.509 = 25.149 \angle 0^\circ \text{ kV} \\ \tilde{\tilde{V}}_1^b &= (0.9089 \angle 252.3^\circ) 63.509 = 57.723 \angle 252.3^\circ \text{ kV} \\ \tilde{\tilde{V}}_1^c &= (0.9089 \angle 107.7^\circ) 63.509 = 57.723 \angle 107.7^\circ \text{ kV}\end{aligned}$$

- e) Voltajes de secuencia positiva, negativa y cero de la fase a de las barras 2 (antes del cortocircuito el voltaje de secuencia positiva era igual a 1, los de secuencia negativa y cero iguales a cero)

$$\tilde{V}_2^1 = 1 - \bar{Z}_{23}^1 \tilde{I}_3^1 = 1 - j0.255 (-j1.179) = 0.699$$

$$\tilde{V}_2^2 = 0 - \bar{Z}_{23}^2 \tilde{I}_3^2 = 0 - j0.255 (-j1.179) = -0.301$$

$$\tilde{V}_2^0 = 0 - \bar{Z}_{23}^0 \tilde{I}_3^0 = 0 - j0.066 (-j1.179) = -0.078$$

f) Voltajes en las fases a , b y c de las barras 2

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_2^a \\ \tilde{V}_2^b \\ \tilde{V}_2^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.699 \\ -0.301 \\ -0.078 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{V}_2^a = 0.699 - 0.301 - 0.078 = 0.320 \angle 0^\circ$$

$$\tilde{V}_2^b = 0.699a^2 - 0.301a - 0.078 = 0.909 \angle 252.3^\circ$$

$$\tilde{V}_2^c = 0.699a - 0.301a^2 - 0.078 = 0.909 \angle 107.7^\circ$$

Voltajes al neutro en las barras 2 en volts

$$V_{B_n} = \frac{110}{\sqrt{3}} = 63.509 \text{ kV}$$

$$\tilde{V}_2^a = (0.320 \angle 0^\circ) 63.509 = 20.323 \angle 0^\circ \text{ kV}$$

$$\tilde{V}_2^b = (0.909 \angle 252.3^\circ) 63.509 = 57.730 \angle 252.3^\circ \text{ kV}$$

$$\tilde{V}_2^c = (0.9059 \angle 107.1^\circ) 63.509 = 57.730 \angle 107.7^\circ \text{ kV}$$

5. Cálculo de las corrientes en las líneas durante el cortocircuito

a) Corrientes de secuencia positiva, negativa y cero de la fase a de la línea 1-2

$$\tilde{I}_{1-2}^1 = \bar{y}_{12}^1 (\tilde{V}_1^1 - \tilde{V}_2^1) = -j4.016(0.724 - 0.699) = -j0.100$$

$$\tilde{I}_{1-2}^2 = \bar{y}_{12}^2 (\tilde{V}_1^2 - \tilde{V}_2^2) = -j4.016(-0.276 + 0.301) = -j0.100$$

$$\tilde{I}_{1-2}^0 = \bar{y}_{12}^0 (\tilde{V}_1^0 - \tilde{V}_2^0) = -j1.248(-0.052 + 0.078) = -j0.032$$

b) Corrientes en las fases a , b y c de la línea 1-2

$$\begin{bmatrix} \tilde{I}_{1-2}^a \\ \tilde{I}_{1-2}^b \\ \tilde{I}_{1-2}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j0.100 \\ -j0.100 \\ -j0.032 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{I}_{1-2}^a = -j0.100 - j0.100 - j0.032 = -j0.232$$

$$\tilde{I}_{1-2}^b = -j0.100a^2 - j0.100a - j0.032 = j0.068$$

$$\tilde{I}_{1-2}^c = -j0.100a - j0.100a^2 - j0.032 = j0.068$$

Corrientes en las fases de la línea 1-2 en amperes

$$I_B = 262.4 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{1-2}^a = -j0.232 \times 262.4 = -j60.9 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{1-2}^b = -j0.068 \times 262.4 = j17.8 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{1-2}^c = -j0.068 \times 262.4 = j17.8 \text{ A}$$

c) Corrientes de secuencia positiva, negativa y cero de la fase a de la línea 1-3

$$\tilde{I}_{1-3}^1 = \bar{y}_{13}^1 (\tilde{V}_1^1 - \tilde{V}_3^1) = -j6.024(0.724 - 0.642) = -j0.494$$

$$\tilde{I}_{1-3}^2 = \bar{y}_{13}^2 (\tilde{V}_1^2 - \tilde{V}_3^2) = -j6.024(-0.276 + 0.358) = -j0.494$$

$$\tilde{I}_{1-3}^0 = \bar{y}_{13}^0 (\tilde{V}_1^0 - \tilde{V}_3^0) = -j1.923(-0.052 + 0.283) = -j0.444$$

d) Corrientes en las fases a , b y c de la línea 1-3

$$\begin{bmatrix} \tilde{I}_{1-3}^a \\ \tilde{I}_{1-3}^b \\ \tilde{I}_{1-3}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j0.494 \\ -j0.494 \\ -j0.444 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{I}_{1-3}^a = -j0.494 - j0.494 - j0.444 = -j1.432$$

$$\widetilde{I}_{1-3}^b = -j0.494a^2 - j0.494a - j0.444 = j0.05$$

$$\widetilde{I}_{1-3}^c = -j0.494a - j0.494a^2 - j0.444 = j0.05$$

Corrientes en las fases de la línea 1-3 en amperes

$$I_B = 262.4 \text{ A}$$

$$\widetilde{I}_{1-3}^a = -j1.432 \times 262.4 = -j375.8 \text{ A}$$

$$\widetilde{I}_{1-3}^b = -j0.05 \times 262.4 = j13.1 \text{ A}$$

$$\widetilde{I}_{1-3}^c = -j0.05 \times 262.4 = j13.1 \text{ A}$$

e) Corrientes de secuencia positiva, negativa y cero de la fase a de la línea 2-3

$$\widetilde{I}_{2-3}^1 = \bar{y}_{23}^1 (\widetilde{V}_2^1 - \widetilde{V}_3^1) = -j12.048(0.699 - 0.642) = -j0.687$$

$$\widetilde{I}_{2-3}^2 = \bar{y}_{23}^2 (\widetilde{V}_2^2 - \widetilde{V}_3^2) = -j12.048(-0.301 + 0.358) = -j0.687$$

$$\widetilde{I}_{2-3}^0 = \bar{y}_{23}^0 (\widetilde{V}_2^0 - \widetilde{V}_3^0) = -j3.559(-0.078 + 0.283) = -j0.730$$

f) Corrientes en las fases a , b y c de la línea 2-3

$$\begin{bmatrix} \widetilde{I}_{2-3}^a \\ \widetilde{I}_{2-3}^b \\ \widetilde{I}_{2-3}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j0.687 \\ -j0.687 \\ -j0.730 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{I}_{2-3}^a = -j0.687 - j0.687 - j0.730 = -j2.104$$

$$\widetilde{I}_{2-3}^b = -j0.687a^2 - j0.687a - j0.730 = j0.43$$

$$\widetilde{I}_{2-3}^c = -j0.687a - j0.687a^2 - j0.730 = j0.43$$

Corrientes en las fases de la línea 2-3 en amperes

$$I_B = 262.4 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{2-3}^a = -j2.104 \times 262.4 = -j552.1 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{2-3}^b = -j0.043 \times 262.4 = -j11.3 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_{2-3}^c = -j0.43 \times 262.4 = -j11.3 \text{ A}$$

6. Cálculo de las corrientes del lado de alta tensión

a) Corrientes de secuencia positiva, negativa y cero de la fase a del lado de alta tensión del transformador T_A

$$\tilde{I}_A^1 = \tilde{I}_{1-2}^1 + \tilde{I}_{1-3}^1 = -j0.100 - j0.494 = -j0.594$$

$$\tilde{I}_A^2 = \tilde{I}_{1-2}^2 + \tilde{I}_{1-3}^2 = -j0.100 - j0.494 = -j0.594$$

$$\tilde{I}_A^0 = \tilde{I}_{1-2}^0 + \tilde{I}_{1-3}^0 = -j0.032 - j0.444 = -j0.476$$

b) Corrientes en las fases a , b y c del lado de alta tensión del transformador T_A

$$\begin{bmatrix} \tilde{I}_A^a \\ \tilde{I}_A^b \\ \tilde{I}_A^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j0.594 \\ -j0.594 \\ -j0.476 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{I}_A^a = -j0.594 - j0.594 - j0.476 = -j1.664$$

$$\tilde{I}_A^b = -j0.594a^2 - j0.594a - j0.476 = j0.118$$

$$\tilde{I}_A^c = -j0.594a - j0.594a^2 - j0.476 = j0.118$$

Corrientes en las fases a , b y c del lado de alta tensión del transformador T_A en amperes

$$I_B = 262.4 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_A^a = -j1.664 \times 262.4 = -j436.6 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_A^b = -j0.118 \times 262.4 = -j31.0 \text{ A}$$

$$\tilde{I}_A^c = -j0.118 \times 262.4 = -j31.0 \text{ A}$$

- c) Corrientes de secuencia positiva, negativa y cero de la fase a del lado de alta tensión del transformador T_B

$$\widetilde{I}_B^1 = \widetilde{I}_{23}^1 - \widetilde{I}_{12}^1 = -j0.687 + j0.100 = -j0.587$$

$$\widetilde{I}_B^2 = \widetilde{I}_{23}^2 - \widetilde{I}_{12}^2 = -j0.687 - j0.100 = -j0.587$$

$$\widetilde{I}_B^0 = \widetilde{I}_{23}^0 - \widetilde{I}_{12}^0 = -j0.730 - j0.032 = -j0.698$$

- d) Corrientes en las fases a , b y c del lado de alta tensión del transformador T_B

$$\begin{bmatrix} \widetilde{I}_B^a \\ \widetilde{I}_B^b \\ \widetilde{I}_B^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j0.587 \\ -j0.587 \\ -j0.698 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{I}_B^a = -j0.587 - j0.587 - j0.698 = -j1.872$$

$$\widetilde{I}_B^b = -j0.587a^2 - j0.587a - j0.698 = j0.110$$

$$\widetilde{I}_B^c = -j0.587a - j0.587a^2 - j0.698 = j0.110$$

Corrientes en las fases a , b y c del lado de alta tensión del transformador T_B , en amperes

$$I_B = 262.4 \text{ A}$$

$$\widetilde{I}_B^a = -j1.872 \times 262.4 = -j491.2 \text{ A}$$

$$\widetilde{I}_B^b = -j0.110 \times 262.4 = -j28.9 \text{ A}$$

$$\widetilde{I}_B^c = -j0.110 \times 262.4 = -j28.9 \text{ A}$$